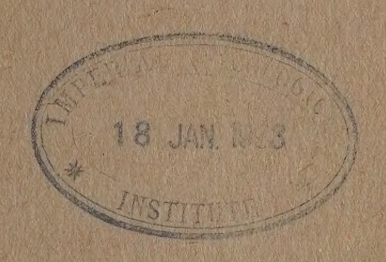
1931 № 7

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

А. Н. Колмогоров. Обобщение теоремы Лапласа-Ляпунова.
ИМЕН, 1931, № 7, стр. 959 (по немецки).

A. Kolmogorov. (A. Kolmogoroff). Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapunoffschen
Satzes. BAS-MN, 1931, № 7, p. 959.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Октябрь 1931 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

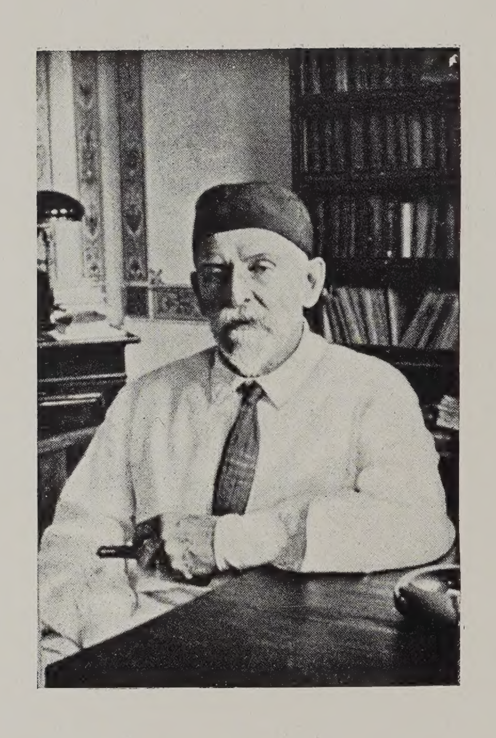
Начато набором в июне 1931 г. — Окончено печатанием в октябре 1931 г.

144 (881—1024) стр. + 3 табл. (6 фиг.).

Статформат $Б_5$

Ленинградский Областлит № 21712. — $9^5/_8$ печ. л. — Тираж 1300.

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СЕРГЕЙ ГАВРИЛОВИЧ НАВАШИН

(1857—1930)

НЕКРОЛОГ

Составлен В. В. Финном

10 декабря 1930 г. скончался в Детском Селе на 74-м году жизни знаменитый ботаник академик Сергей Гаврилович Навашин, научные работы которого пользуются всемирной известностью.

С. Г. Навашин родился 2 декабря 1857 г., в с. Царевщине, Вольского у., Саратовской губ. Отец С. Г., по профессии врач, умер, когда сын достиг шестилетнего возраста. В виду того, что семья осталась без средств, С. Г. пришлось получать образование на собственные заработки, давая частные уроки. По окончании курса в Саратовской гимназии, он поступил в Медико-хирургическую академию, где, увлекшись изучением химии, работал по целым дням в лаборатории проф. А. П. Бородина. Специальные медицинские предметы мало его интересовали; в клиниках же, по словам самого С. Г., он даже совершенно не мог работать. В связи с этим С. Г., сдав экзамен за 4 курса, вышел из академии и поступил в Московский университет, где продолжал свои занятия по химии, а также увлекался лекциями по физиологии растений, которые читал проф. К. А. Тимирязев. Окончив в 1881 г. курс университета, С. Г. получил степень «кандидата» за «рассуждение» на тему: «О конституции соляных растворов».

Только по окончании университета, будучи уже ассистентом при кафедре проф. К. А. Тимирязева, С. Г. серьезно занялся ботаникой. Этот поворот от химии к ботанике совершился, с одной стороны, под влиянием общения с К. А. Тимирязевым, а с другой, благодаря знакомству с страстным любителем живой природы и прекрасным знатоком местной флоры профессором математики В. Я. Цингером.

Первоначально С. Г. занимал должность ассистента при проф. К. А. Тимирязеве в Московском университете, а затем и в Петровской академии.

С этого времени начинается первый период в научной деятельности С. Г. — период морфолого-систематический, в течение которого он обогатил науку целым рядом образцовых работ в области морфологии и систематики мхов и грибов. Обладая необычайным даром наблюдательности, С. Г. уже в первых своих работах делает неожиданные открытия; так например, он показывает, что так называемые «микроспоры» *Sphagnum* представляют собою споры гриба *Tilletia Sphagni* Naw., паразитирующего на этом мхе. Эти работы до последнего времени не потеряли своего научного значения и цитируются в соответствующей специальной литературе. Прекрасно монтированные, тщательно определенные гербарии, изящные прочные препараты, сохранившиеся и до сего дня, а также множество художественно исполненных рисунков свидетельствуют, с одной стороны, о большой любви С. Г. к объектам его исследований, а с другой стороны, могут характеризовать его, как необыкновенно глубокого и серьезного научного работника. Перейдя впоследствии к изучению совершенно иных вопросов, С. Г. на всю жизнь сохранил особую любовь к вышеуказанным споровым растениям, побуждавшую его время от времени возвращаться к их исследованию.

В 1888 г. С. Г. сдал блестяще при Петербургском университете магистрантский экзамен, поразив экзаменаторов глубиною своих знаний. Это дало ему возможность начать самостоятельное преподавание в высшей школе. Будучи приват-доцентом, он читал в Московском университете введение в систематику грибов, а в Петровской академии курс патологии растений.

После разгрома Петровской академии и ухода из нее К. А. Тимирязева, С. Г., получив приглашение из Петербургского университета, перешел туда ассистентом по ботанике, к проф. И. П. Бородину. Там же он читал приват-доцентский курс по патологии растений.

Как говорит сам С. Г. в своей автобиографии, судьба свела его там с тремя светлыми личностями: И. П. Бородиным, А. Н. Бекетовым и М. С. Ворониным. С Ворониным С. Г. был связан узами тесной дружбы и всегда о нем вспоминал с особенным благоговением. М. С. Воронин, классические работы которого пользуются широкой известностью, оказал несомненное влияние на углубление исследований С. Г. в области изучения истории развития низших растений. Это влияние сказывается, между прочим,

в том, что С. Г., подобно М. С. Воронину, снабжал свои работы художественными рисунками в красках, на которых изученные организмы и сделанные из них препараты изображаются точно такими, какими они наблюдаются в природе или под микроскопом. В своей автобиографии С. Г., вспоминая совместную работу с Михаилом Степановичем, говорит, что признает его своим учителем по исследованиям истории развития низших организмов. По его же совету, он взялся за исследование истории развития *Sclerotinia Betulae* Woron., паразитирующей на плодах березы. Защитив эту работу в Петербургском университете, С. Г. получил в 1894 г. степень магистра ботаники.

Указанное исследование, кроме специального интереса, имело решающее значение во всем дальнейшем направлении работ С. Г. Изучая прохождение гиф склеротинии в завязи березы, он обратил внимание, что постоянно наблюдается какая-то необыкновенно толстая «гифа». Заинтересовавшись этим странным явлением, С. Г. очень скоро установил, что эта широкая трубка не гифа гриба, а пыльцевая трубка березы, проходящая здесь эндотропно через халацу подобно тому, как у казуарин, согласно только что появившимся в то время данным М. Трейба.

Первоначально ученые отнеслись с недоверием к этому неожиданному открытию, так как один из корифеев ботанической науки, знаменитый Гофмейстер вскользь упомянул в одной из своих работ, что наблюдал у березы пыльцевую трубку в микропилярном канале. Европа еще не знала Навашина! Только после проверки и подтверждения этого факта другими учеными, его стали считать твердо установленным. Это открытие сделало сразу имя С. Г. известным далеко за пределами родной страны. Со времени открытия у березы так называемой халацогамии, начинается второй период в научной деятельности С. Г. — период эмбриологический, при чем особенно рельефно выступает свойственное ему последовательное и неуклонное расширение научных интересов и углубление исследования. В начале этого периода С. Г. продолжает свои исследования по эмбриологии *Betulaceae* и устанавливает халацогамию у *Corylus Avellana* и *Alnus viridis*.

В это же время (1894 г.), после смерти проф. И. Ф. Шмальгаузена, он получает кафедру морфологии и систематики растений в Киевском университете, где, расширяя свои замечательные исследования по прохождению пыльцевой трубки *Monochlamydeae* открывает халацогамию у видов *Juglans* и переходные к обычной порогамии случаи у видов *Ulmus*, между тем как

старший из его учеников, незабвенный Николай Васильевич Цингер, устанавливает подобные же явления у коноплевых.

Будучи уже профессором Киевского университета, С. Г. защитил в 1896 г. в Одессе докторскую диссертацию на тему: «Об обыкновенной березе и морфологическом значении халацогамии».

Вышеуказанная серия работ по эмбриологии *Monochlamydeae*, с одной стороны, показала несостоятельность взглядов М. Трейба, противопоставлявшего казуарины всем прочим покрытосеменным, а с другой стороны, дала некоторую базу для помещения этих растений в начале системы двудольных и для установления связи последних с голосеменными. Следует, конечно, отметить, что эта точка зрения, высказанная С. Г., а впоследствии детально разработанная известным филогенетиком Веттштейном, разделяется далеко не всеми систематиками. Во всяком случае, каково бы ни было отношение к филогенетическому значению типичной халацогамии и к случаям переходным от нее к обычной порогамии, факты, установленные С. Г. и его учениками, имеют большую ценность для систематики растений. В настоящее время невозможно сколько-нибудь полно характеризовать такие семейства, как *Betulaceae*, *Juglandaceae*, *Ulmaceae*, не указав на особенности в прохождении у них пыльцевых трубок. Рассматриваемые работы еще раз показали, что эмбриологические признаки могут иметь важное систематическое значение.

Изучая прохождение пыльцевых трубок у видов *Juglans*, С. Г. обратил внимание на маленькие бисквитообразные тельца, которые довольно часто наблюдались в зародышевых мешках *Juglans nigra* во время и после оплодотворения. Эти тельца получили в лаборатории С. Г. название «бисквиток» или «очков», благодаря своему внешнему сходству с названными предметами. Ученики С. Г., шутя, называли их «очками» своего учителя в зародышевом мешке *Juglans*.

С. Г. сразу же совершенно правильно признал эти тельца за образования, заключающие мужские гаметы, но изучить подробности строения последних, а также констатировать у *Juglans* процесс оплодотворения в то время ему не удалось, что объясняется чрезвычайно малыми размерами спермиев. Последнее было сделано значительно позже в совместной работе с автором настоящих строк.

Желая познакомиться с половым процессом покрытосеменных на более благодарных объектах, каковыми считались в то время лилейные, С. Г.

взялся за переисследование этих растений с тем, чтобы впоследствии вернуться опять к изучению того же процесса у *Juglans*. В то время было уже установлено, что у исследованных покрытосеменных одна из мужских гамет оплодотворяет яйцеклетку, роль же другой гаметы совершенно не была выяснена.

В 1898 г., воспользовавшись летним каникулярным временем, С. Г. взялся за работу с большим воодушевлением и энергией. Он просиживал целыми днями в лаборатории, изготовляя множество препаратов из завязей *Lilium martagon* и *Fritillaria tenella*, так что находившийся при лаборатории служитель часто его спрашивал: «Что это Вы, С. Г., на продажу их готовите?».

Скоро С. Г. заметил, что в то время, как один спермий проникает в яйцеклетку, другой тесно прикладывается к верхнему полярному ядру, при чем эта пара сливающихся ядер направляется к нижнему полярному ядру, а затем происходит полное слияние всех трех ядер (одного мужского и двух женских). С. Г. часто рассказывал автору настоящих строк, как он «ломал голову», чтобы понять этот процесс. Скоро он был понят и совершенно правильно объяснен: эндосперм подобно зародышу образуется в результате оплодотворения.

В такой обстановке было открыто так называемое двойное оплодотворение, особенно прославившее имя С. Г. и доставившее ему бессмертие в науке.

Для полноты картины здесь уместно вспомнить рассказ Н. В. Цингера, собравшего материал, на котором впервые было открыто двойное оплодотворение. По просьбе учителя, он поехал в Боярку (дачное место в двадцати верстах от Киева), где в сосновом лесу собрал большой букет *Lilium martagon*. Был жаркий летний вечер, надвигалась гроза, по временам небо озарялось молниями, сфинксы летали над букетом, опыляя цветы лилии. Вот на этом материале, фиксированном флемминговской жидкостью, и было впервые открыто двойное оплодотворение.

С. Г. спешил закончить свою работу к десятому съезду естествоиспытателей и врачей, который должен был состояться в Киеве в конце августа 1898 г., что ему вполне и удалось. На этом съезде, в заседании секции ботаники 24 августа С. Г. сделал первый доклад о своем замечательном открытии под заглавием: «Новые наблюдения над оплодотворением у *Fritillaria tenella* и *Lilium martagon*», резюме которого напечатано в дневнике

съезда. Это первое печатное сообщение о двойном оплодотворении покрытосеменных.

Автор настоящих строк присутствовал на этом заседании и хорошо помнит всю его обстановку и овации аудитории в честь докладчика. Один из оппонентов проф. В. И. Беляев заметил, что сообщение проф. С. Г. Навашина, по скромному мнению автора, «вносящее некоторые частности в вопросе об оплодотворении некоторых семенных», изменяет господствовавшие до сих пор взгляды в самых основных чертах. Собственноручно изготовленные С. Г. к съезду таблицы хранятся до сего дня в той лаборатории, где впервые было открыто двойное оплодотворение.

Уже само по себе открытие двойного оплодотворения, являющегося одним из наиболее характерных отличительных признаков покрытосеменных, должно быть, конечно, отнесено к числу очень крупных открытий в области ботаники. Значение этого открытия увеличивается еще, если вспомнить, что только благодаря ему сделалось понятным явление «ксений», остававшееся загадочным до того времени.

Для того чтобы сделать это замечательное открытие, необходимо было обладать целым рядом качеств, которые как раз были присущи покойному ученому. Для этого необходимы были исключительная наблюдательность и проницательность, отсутствие малейшей предвзятости при наличии виртуозной техники и особых методов рисования, сводившихся к тому, что на рисунках с поразительной точностью передавалось все видимое в микроскоп. Замечательно, что С. Г. в первой работе, посвященной двойному оплодотворению, совершенно правильно предсказал, что «открытые» им «факты у *Liliaceae*, которые всеми сделанными до сих пор исследованиями были замечательным образом просмотрены, обнаружатся и у других явнобрачных, изучение которых, как известно, значительно труднее» (Resultate einer Revision der Befruchtungsvorgänge bei *Lilium martagon* und *Fritillaria tenella*. Bull. de l'Acad. des Sci. de St.-Pétersbourg, t. 9, № 4, 1898). Это предсказание сбылось полностью, как всем теперь прекрасно известно.

По поводу открытия С. Г. двойного оплодотворения Страсбургер говорит, что оно явилось для ботаников «сюрпризом, делавшим честь проницательности и наблюдательности того исследователя, которому это удалось открыть» (Einige Bemerkungen zur Frage nach der «doppelten Befruchtung» bei den Angiospermen. Bot. Ztg. 58, 1900).

Самым замечательным в этом открытии было то, что целый ряд исследователей и среди них такие корифеи растительной цитологии, как Страсбургер и Гиньяр, изучая годами тот же объект *Lilium martagon*, фатально просмотрели двойное оплодотворение. Только после появления работы С. Г. они на своих старых препаратах стали находить описанные им картины двойного оплодотворения. Такая же неудача постигла и русского ученого проф. В. М. Арнольди, который за несколько лет до открытия двойного оплодотворения получил на препарате *Scilla sibirica* прекрасную картину двойного оплодотворения. Здесь на одном разрезе уже при третьем объективе прекрасно видны оба спермия в контакте с женскими ядрами. Этот препарат, любезно подаренный С. Г. проф. В. М. Арнольди, хорошо известен киевским ботаникам. С. Г. любил демонстрировать этот препарат студентам на практических занятиях, ибо по ясности картины двойного оплодотворения он был, действительно, исключительным.

Открывши двойное оплодотворение, С. Г., к сожалению, не имел возможности сразу же детально изучить этот процесс у различных представителей покрытосеменных, так как, приняв приглашение М. Трейба, посетившего его в Киеве, поехал на о. Яву в знаменитый Бейтензоргский ботанический сад, куда он получил командировку от Академии Наук. Он успел только опубликовать в бюллетене Академии Наук небольшую статью на немецком языке без рисунков (Resultate einer Revision der Befruchtungsvorgänge bei *Lilium martagon* und *Fritillaria tenella*. Bull. de l'Acad. des Sci. de St.-Pétersbourg, t. 9, № 4, 1898). Однако же процесс двойного оплодотворения, открытие которого поразило всех биологов своей неожиданностью, в указанной статье изложен чрезвычайно точно и достаточно полно, так что Страсбургер и другие выдающиеся ученые признали за С. Г. приоритет этого открытия. Это, однако, не помешало Гиньяру приписать себе честь открытия двойного оплодотворения. Он сделал вид, что не знаком с оригинальной работой С. Г., хотя она ему была послана заказной бандеролью, что автору настоящих строк доподлинно известно. По словам Гиньяра, он ознакомился только с небольшим рефератом, помещенным в Botanisches Centralblatt, и спешит опубликовать данные своего многолетнего исследования в виду появления работы проф. Навашина, касающейся того же вопроса (Guignard. Sur les anthérozoïdes et la double copulation sexuelle chez les végétaux angiospermes. C.R. Ac. Paris, 128, 1899). Свое же долгое молчание он объясняет желанием углубить исследование, так как

факты, наблюденные им в зародышевом мешке *Lilium martagon* и других видов лилии, были чрезвычайно неожиданными. Работа Гиньяра снабжена рисунками, которые до сего времени фигурируют в ботанической литературе наравне с позднейшими рисунками С. Г. Вслед за этой работой Гиньяр публикует целый ряд других исследований, в которых констатирует существование двойного оплодотворения у представителей различных семейств покрытосеменных, воспользовавшись временным молчанием С. Г., находившегося в Бейтензорге, а затем по возвращении в Киев заболевшего тяжелой формой фурункулеза, полученного в тропиках и не оставлявшего его в течение всей жизни. За свои работы по двойному оплодотворению Гиньяр был избран действительным членом Парижской Академии Наук и получил премию в 25000 франков.

Только некоторые французские ученые признали самостоятельное, хотя и одновременное с С. Г., открытие Гиньяром двойного оплодотворения. Ученые же других стран всегда признавали приоритет С. Г., так как ясно было, что если бы Гиньяр действительно открыл это явление раньше С. Г. Навашина, то он поспешил бы опубликовать данные своих исследований, не ожидая, пока это сделает другой ученый. Не обладая дарованиями С. Г., Гиньяр, очевидно, не понял того, что было на его препаратах, и только, ознакомившись с работой русского ученого, наконец, уразумел, в чем тут дело. Следует, однако, заметить, что некоторые соотечественники С. Г., не зная, вероятно, всей этой некрасивой истории, помещают, к сожалению, рядом с его именем имя Гиньяра, когда речь идет о двойном оплодотворении.

К чести С. Г. надо сказать, что он всему этому не придавал особенного значения и говорил только об этом иногда в шутливом тоне.

В тропиках С. Г. произвел исследование над орхидными, подтвердившее его открытие. По возвращении в Киев он продолжал свои исследования над оплодотворением и показал, что двойное оплодотворение является присущим различным представителям покрытосеменных и может считаться признаком, общим всему этому подъотделу растительного царства. В то же время у него замечается все большая и большая склонность к цитологическим исследованиям. Первой его чисто цитологической работой является замечательное исследование «О тонком строении и превращениях *Plasmodiophora Brassicae* Woron. в течение ее внутриклеточного развития». Эта работа представляет собою образец тончайшего цитологического исследования и не потеряла до сего времени своего значения. В новейшей литера-

туре, посвященной цитологии миксомицетов, мы встречаем величайшие похвалы по адресу автора данной работы. На это исследование обратили внимание не только ботаники, но и медики, интересовавшиеся злокачественными опухолями. Пользовавшийся большою известностью берлинский клиницист проф. Лейден прислал в Киев своего ассистента с поручением ознакомиться с препаратами С. Г.

Среди многочисленных работ С. Г. мы встречаем также и цито-эмбриологические исследования. Таким, например, является его классический труд, посвященный изучению истории развития спермиев у лилии, где ему удалось наблюдать тончайшее строение хромозом, при делении ядра генеративной клетки.

Научные заслуги С. Г. были впервые и одновременно оценены в 1901 г. нашей Академией Наук и Немецким ботаническим обществом, избравшими его своим членом-корреспондентом, а также Венским зоолого-ботаническим обществом, почтившим его дипломом почетного члена. С этого времени и до самой смерти С. Г. был в центре внимания биологов всего мира, которые, выражая свое восхищение перед его замечательными открытиями, непрестанно избирали его членом различных академий, почетным членом научных обществ, почетным председателем международных конгрессов и съездов, а также присуждали ему премии и помещали в своих музеях и лабораториях его портреты и рисунки из его работ. Так, например, автору настоящих строк известно, что портрет С. Г. был помещен в ботанической лаборатории Чикагского университета, а также в одном из университетов Австралии; рисунки же из его работ (халацогамия у березы и двойное оплодотворение у подсолнечника) автор настоящих строк видел в Далемском музее среди рисунков, взятых из работ величайших корифеев ботанической науки. Кроме того выдающиеся ученые присылали С. Г. свои препараты. Так, например, известный американский ботаник Чемберлен прислал в 1910 г. ценнейшую коллекцию препаратов по эмбриологии саговников.

В 1908 г. киевские ученые праздновали 25-летие научно-педагогической деятельности С. Г., при чем в чествовании юбиляра приняли участие ученые всего мира. Подробные данные об этом юбилее помещены в Трудах Ботанического сада Юрьевского университета за 1909 г.

Приблизительно в это время С. Г. был избран почетным членом Немецкого ботанического общества, членом-корреспондентом Баварской Академии Наук, иностранным членом лондонского Линнеевского общества,

а также почетным членом нескольких русских обществ естествоиспытателей.

В это время С. Г. жил в Святошине близ Киева, где он оборудовал маленькую лабораторию на собственные средства. Здесь, главным образом, он вел свои научные исследования, все более и более углубляясь в чистую цитологию, при чем для работы он пользовался растениями, которые отчасти культивировал тут же в своем саду, а отчасти в Ботаническом саду Киевского университета, директором которого он состоял в течение двадцати лет (1894—1914).

С 1910 г. начинается третий период в научной работе С. Г. — период чисто цитологический, посвященный, главным образом, изучению морфологии ядра и хромозом. И в этой области он делает опять новые замечательные открытия на неоднократно исследованной другими цитологами *Galtonia candicans*, которая с тех пор стала знаменитой. Здесь он устанавливает замечательную морфологическую особенность одной из пар хромозом, снабженных так называемыми спутниками. Кроме того у *Galtonia candicans* он открывает две расы: одну с ядром симметричного строения, другую же с ядром асимметричным. Изучение генетических отношений этих рас вводит исследования С. Г. непосредственно в область генетики. Интересно здесь отметить, что Страсбургер и другие цитологи, изучавшие то же растение, опять фатально просмотрели у него и спутников и существование двух рас. Подобные же морфологические особенности хромозом С. Г. вскоре нашел и у других растений. Последующие работы различных цитологов показали, что спутники присущи хромозомам многих представителей покрытосеменных. Кроме того С. Г. обнаружен еще целый ряд замечательных морфологических особенностей у хромозом различных растений, как например, головки, сяжки, и т. п. Все эти чрезвычайно тонкие наблюдения и открытия С. Г. сделал благодаря своим дарованиям, среди которых необходимо еще отметить необычайную остроту зрения, всегда поражавшую его учеников.

Открытие спутников и двух рас у *Galtonia candicans* было произведено на моих глазах. Будучи многолетним сотрудником С. Г., я часто посещал его в Святошине и часами любовался его препаратами, демонстрацию которых он всегда сопровождал весьма интересными и ценными объяснениями. В одно из таких посещений, едва войдя в прихожую, я услышал радостный возглас С. Г.: «Владимир Васильевич, что я Вам покажу». Я поспешил в кабинет и увидел С. Г. сидящим у микроскопа. Показывая препарат

Galtonia, он спросил: «Что Вы видите?». Я ответил, что вижу хромозомы. «А еще что?», спросил мой учитель. Я должен был признаться, что больше ничего особенного не вижу. С. Г. выразил свое неудовольствие и стал мне задавать наводящие вопросы. Наконец я прозрел и увидел в первый раз в жизни спутников. Я был поражен необыкновенной тонкостью виденных структур и высокими качествами препаратов. На одном из препаратов С. Г., между прочим, показал мне пылинку *Galtonia*, разрезанную на 18 частей: последовательно на срезах можно было наблюдать горбушку пылинки, затем разрезы с все увеличивающимся диаметром, наконец уменьшение этих диаметров и противоположную горбушку пылинки. Этот препарат поражал необычайной тонкостью срезов, прекрасной фиксацией материала и удивительно нежной дифференциальной окраской различных составных частей пылинки.

Все виденное мною еще раз свидетельствовало о виртуозной технике, художественном чутье и необычайно любовном отношении к объектам своих исследований творца этих замечательных препаратов.

Необходимо отметить, что С. Г. сам изготовлял препараты для своих исследований. Он никогда не пользовался помощью специальных препараторов, чего нельзя сказать о многих других ученых. Он очень любил технику изготовления препаратов, начиная с точения микротомной бритвы и кончая заключением препарата в канадский бальзам. Все эти процедуры производились необычайно аккуратно и с большим знанием дела, при чем видно было, что мы имеем дело с величайшим мастером. Всем видевшим препараты С. Г. известно, что они вне конкуренции; можно смело сказать, что они неподражаемы. Эта черта С. Г. несомненно содействовала тому успеху, который всегда сопровождал его научную работу, ибо для этого прежде всего необходимы были безупречные препараты, которые вряд ли мог бы изготовить незаинтересованный в работе препаратор. С. Г. был также величайшим знатоком микроскопа и умел максимально использовать этот инструмент; он особенно любил пользоваться апохроматами Цейсса. Данные вышерассмотренных цитологических исследований С. Г. были опубликованы сперва в изданиях Академии Наук, а впоследствии в «Известиях Немецкого ботанического общества».

В 1915 г. С. Г. подвергся операции. Врачи констатировали у него рак и даже говорили, что дни С. Г. сочтены. К счастью, их предсказания не сбылись; С. Г. прожил еще после операции пятнадцать лет, в течение которых опубликовал ряд ценных работ и подготовил к научной деятель-

ности большое количество учеников. После операции, по совету врачей, С. Г. переехал на юг, избрав местом жительства Тифлис.

Подводя итоги 20-летнему пребыванию С. Г. в Киеве, в течение которого произведены главнейшие его открытия, необходимо отметить, что он наряду с научно-исследовательской деятельностью вел также большую педагогическую работу. Кроме Киевского университета, в стенах которого, главным образом, протекла его научно-педагогическая деятельность, он состоял еще профессором Киевского политехнического института и Киевских вечерних женских курсов, будучи всегда поборником высшего женского образования. С. Г. не был чужд также и общественно-просветительной работы, читая публичные лекции и состоя членом различных просветительных обществ.

Лекции С. Г. были очень содержательны и полны свежести. Особенно сильное впечатление производили на его учеников лекции по морфологии и эмбриологии растений, где приводилось много данных добытых самим С. Г. Это было свидетельство очевидца в полном смысле этого слова. Для полноты картины необходимо указать, что лекции сопровождались демонстрациями чудных, редчайших препаратов, тех самых препаратов, на которых были им сделаны открытия.

В Киеве С. Г. имел много учеников, которые под его руководством вели научно-исследовательскую работу. Среди них самым старшим по возрасту был покойный профессор Н. В. Цингер. Его же учениками являются: Л. Н. Делоне, Г. А. Левитский, Я. С. Модилевский, сын Сергея Гавриловича М. С. Навашин, Д. Я. Персидский, В. И. Фаворский, В. Н. Хитрово, Н. Г. Холодный, М. В. Чернояров, автор настоящих строк и целый ряд других лиц, которые и до настоящего времени ведут научно-исследовательскую и педагогическую работу.

Неоднократно в Киев приезжали к С. Г. иностранные ученые, как например М. Трейб и Б. Немец, чтобы повидаться с ним и ознакомиться с его замечательными препаратами. Более же молодые иностранные ученые, как например Лотси и Клеменс-Мюллер, приезжали поработать под руководством С. Г. в его лаборатории. Одно время в этой же лаборатории работал также и покойный проф. В. А. Ротерт. Кроме того, целый ряд соотечественников С. Г. был командирован различными университетами для научной работы под непосредственным его руководством.

В Тифлисе, несмотря на тяжелые условия, С. Г. продолжал свою научную и педагогическую деятельность, состоя профессором Грузинского

университета и Тифлисского политехникума. Здесь у него также были ученики, среди которых особенно выдавалась А. Г. Николаева. Кроме того, в Тифлисе С. Г. последовательно исполнял обязанности декана и ректора.

В 1917 г. С. Г. был избран действительным членом двух Академий: русской Академии Наук и Академии Наук в Упсале.

В 1923 г. в Тифлисе состоялось торжественное чествование С. Г. по случаю исполнения 40-летия его научно-педагогической деятельности и 25-летия открытия им двойного оплодотворения. В чествовании его приняли участие научные учреждения и отдельные ученые различных стран.

Весною 1923 г. С. Г. был приглашен занять место директора вновь учрежденного в Москве Государственного Тимирязевского научно-исследовательского института. Здесь в лаборатории Отделения экспериментальной эволюции, заведующим которым состоял С. Г., он вел научную работу, почти до самой смерти, с неослабной энергией. В последние годы своей жизни С. Г. был окружен в Москве множеством учеников, создав здесь целую школу. Он уже мало печатал, предоставляя ученикам для окончательной обработки свои неоконченные работы и наблюдения. За это время появилось много очень интересных работ его учеников, которые были напечатаны в различных русских и иностранных журналах. Об одной из таких работ следует здесь упомянуть, так как сообщаемые в ней новые факты, по словам автора, впервые были замечены С. Г., что еще раз свидетельствует о необычайной наблюдательности последнего, не покидавшей его до самой смерти. Я имею в виду работу Д. А. Транковского: «Leitkörperchen der Chromosomen bei einigen Angiospermen» (Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopische Anatomie, Bd. 10, 1930). Здесь описаны у нескольких растений (*Bellevallia montana, Najas major, Crepis capillaris, C. Dioscoridis* и *C. palestina*) особые тельца («Leitkörperchen»), принадлежащие хромозомам, к которым прикрепляются нити веретена. Эти тельца наблюдались на различных стадиях деления ядра. Мы имеем здесь тончайшее цитологическое исследование, расширяющее и углубляющее наши знания в области кариокинеза у растений вообще. Самое замечательное, что эти наблюдения сделаны на старых, сильно дифференцированных препаратах столь опытных цитологов, какими являются Делоне, М. Навашин и Чернояров. Эти лица, несмотря на их большой опыт, не заметили на своих препаратах вышеуказанных интересных, новых фактов. С. Г. же, благодаря своим исключительным дарованиям, как раз на этих препаратах делает опять замечательное открытие. Таким

образом, мы видим, что С. Г. не только открывал совершенно новое на многократно исследованных другими учеными объектах, но даже делал открытия на препаратах, изученных уже раньше видными специалистами.

В 1924 г. Всеукраинская Академия Наук и в 1925 г. Американское ботаническое общество избрали С. Г. своим членом.

В 1926 г. С. Г. избран почетным председателем Международного конгресса ботаников в Итаке (шт. Нью-Йорк), в 1927 г. — почетным председателем Международного съезда генетиков в Берлине и в 1930 г. — одним из председателей такого же конгресса ботаников, состоявшегося в Англии.

В 1927 г. московские ученые праздновали 70-летие со дня рождения С. Г.; в чествовании маститого юбиляра приняли живое участие ученые всего мира. Особенно трогательное приветствие было прислано Немецким ботаническим обществом.

Еще при жизни С. Г. вышел в свет ряд посвященных ему изданий и монографий.

В Москве, как в Киеве, С. Г. был постоянно в центре внимания иностранных ученых и научных учреждений, ведя с ними деятельную переписку и обмен научными трудами. Неоднократно к нему приезжали видные ученые, как, например, известный цитолог Тишлер, который залюбовался его препаратами и был поражен всем виденным. Несколько раз С. Г. ездил из Москвы за-границу; за год до смерти он сделал научный доклад в заседании Немецкого ботанического общества, почетным членом которого он состоял.

Незадолго перед смертью, утомленный продолжительной административной деятельностью, С. Г. покидает пост директора Института им. К. А. Тимирязева, оставив за собою только заведывание лабораторией Отделения экспериментальной эволюции. Желая быть ближе к Академии Наук, он переезжает в Детское Село, где продолжает работать в цитологической лаборатории своего ученика проф. Г. А. Левитского, при чем время от времени посещает и Москву для руководства работами своих учеников.

Осенью 1930 г. С. Г. заболел; у него оказался чрезвычайно злокачественный грипп, продолжавшийся полтора месяца и приведший к полному сепсису.

В 2 часа утра, 10 декабря 1930 г. не стало С. Г.!

Тело покойного было перевезено в Москву, где 14 декабря состоялась кремация. Прах его погребен в урне, имеющей вид увеличенной гильзочки

от цейссовского объектива. Гробница С. Г. является как бы символом всей его выдающейся научной деятельности, напоминая обо всем том, что было так дорого ему и чем он в совершенстве владел.

Подводя итоги многообразной деятельности С. Г., необходимо прежде всего отметить его необыкновенную разносторонность. Он не был узким специалистом, а широко образованным биологом, хорошо знакомым и с химией, и с общей биологией, и с различными ботаническими дисциплинами. Кроме того он интересовался философией, литературой, астрономией и многим другим. Эрудиция С. Г., конечно, содействовала успешности его работы. При всем этом С. Г. был ученым-самородком, не принадлежа ни к какой школе.

Хотя М. С. Воронин и оказал некоторое влияние на его работы по изучению истории развития низших организмов, но в той области, в которой он творил, у него не было учителей. С. Г. сделал свои главнейшие открытия, не побывав еще заграницей и лично не ознакомившись с тем, что делалось в лабораториях иностранных корифеев-цитологов. Всем обязан С. Г. исключительно самому себе, своим дарованиям.

Воздавая последнюю дань незабвенному дорогому учителю, автор настоящих строк считает необходимым еще указать, что покойный был не только высокоталантливым ученым, но и великим художником, который понимал и ценил красоту, разлитую во всей природе, включая и красоту, наблюдаемую в микроскоп. Всем знавшим С. Г. хорошо известно, с каким восхищением он созерцал эту красоту, просиживая часами у микроскопа.

С. Г. был не только ученым-классиком, но и художником в полном смысле этого слова. Все, что он делал, было прекрасно: прекрасны его коллекции, прекрасны его препараты, прекрасны его рисунки, прекрасны его работы, прекрасны его открытия.

После С. Г. осталось большое научное наследие: прекрасные гербарии, колоссальное количество препаратов, художественные рисунки и большое количество ценнейших научных трудов, среди которых есть еще и неопубликованные. Среди последних особенно ценны следующие: «О распределении митозов в меристеме растущего корешка у некоторых одно- и двудольных» (в связи с вопросом о митогенетических лучах), а также исследование по цитологии *Ascaris*. Интересно отметить, что в коллекциях С. Г. можно найти замечательные реликвии, как например, препараты Де-Бари по оплодотворению у переноспоровых грибов, подаренные ему М. С. Ворониным; неко-

торые из этих препаратов, несмотря на то, что они заключены в глицерин, сохранились прекрасно и до настоящего времени.

Особенная же заслуга С. Г. в том, что он создал большую цитолого-эмбриологическую школу, и что все специалисты нашего Союза в указанных областях являются непосредственно или косвенно его учениками. Главнейшие центры, где ведется работа этой школы, находятся в Ленинграде, Москве и Киеве, причем руководят здесь научно-исследовательской работой старшие из учеников С. Г.

Наилучший памятник, который может быть воздвигнут незабвенному, дорогому С. Г., — это продолжение его школой того дела, которому он служил с таким успехом, с такой любовью всю свою жизнь, что даст ему подлинное бессмертие в науке.

Киев, 26 II 1931 г.

Научные заслуги Сергея Гавриловича Навашина были отмечены следующими учреждениями и обществами:

1) Академия Наук в Петербурге: член-корреспондент (29 XII 1901) первая премия К. Бэра (1904) за ряд работ по эмбриологии семенных растений, увенчавшихся открытием двойного оплодотворения; действительный член Российской Академии Наук (1917).

2) Баварская Академия Наук: член-корреспондент (15 VII 1908).

3) Академия Наук в Упсале (Regia Societas Scientiarum Upsaliensis): ординарный член (1 III 1917).

4) Всеукраинская Академия Наук: член (7 IV 1924).

5) Deutsche Botanische Gesellschaft: Korrespondierendes Mitglied 1901; Ehrenmitglied (12 IX 1907).

6) Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien: Ehrenmitglied (1901).

7) Botanical Society of Edinburgh: член-корреспондент (16 III 1911).

8) Linnean London Society: иностранный член, foreign member (1 V 1911).

9) Botanical Society of America: corresponding member (29 XII 1925).

10) Петербургское общество естествоиспытателей: почетный член (6 IV 1908).

11) Петербургское биологическое Общество: почетный член (17 XI 1914).

12) Киевское общество естествоиспытателей: почетный член (20 I 1908).

13) Общество испытателей природы при Харьковском университете: почетный член (27 I 1908).

14) Общество естествоиспытателей при Казанском университете: почетный член (17 II 1908).

15) Ново-Александрийский институт с.-х. и лес.: в 1907 г., учрежден студенческий биологический кружок имени С. Г. Навашина.

16) Кавказский отдел Русского географического общества: почетный член (24 III 1916).

17) Киевский географический институт: почетный член (22 X 1917).

18) Общество естествоиспытателей при Донском университете: почетный член (20 V 1918).

19) Кавказское лесное общество: почетный член.

20) Общество испытателей природы в Москве: почетный член (1923).

Избран:

1) Почетным председателем Международного конгресса ботаников в Итаке (шт. Нью-Йорк) (VIII 1926).

2) Почетным председателем Международного съезда генетиков в Берлине (IX 1927).

3) Одним из вице-президентов Международного конгресса ботаников в Кембридже (VIII 1930).

4) Председателем нескольких Всесоюзных съездов ботаников.

СПИСОК ИЗДАНИЙ, ПОСВЯЩЕННЫХ С. Г. НАВАШИНУ

1) Н. В. Цингер. О засоряющих посевы льна видах *Camelina* и *Spergula* и их происхождении. Тр. Бот. муз. АН, вып. VI, 1909. Посвящение: «Глубокоуважаемому и дорогому учителю профессору Сергею Гавриловичу Навашину посвящает свой труд признательный автор».

2) Чествование профессора С. Г. Навашина по случаю 25-летия его научно-педагогической деятельности. Отд. отт. из Тр. Бот. сада. Юрьев. унив., 1909.

3) Русские классики морфологии растений. ГИЗ, 1923. С портретом С. Г. в медальоне, посвящено ему и другим русским морфологам.

4) Г. А. Левитский. Материальные основы наследственности. ГИЗ Украины, 1924. Посвящение: «Посвящаю этот труд своему дорогому учителю Сергею Гавриловичу Навашину».

5) Труды по прикладной ботанике, генетике и селекции, т. XVII, 1927. Посвящение: «Настоящий генетико-цитологический выпуск Трудов по прикладной ботанике, генетике и селекции посвящается основателю генетической цитологии в нашей стране Сергею Гавриловичу Навашину».

6) Сборник имени Сергея Гавриловича Навашина в честь сорокалетия научной деятельности его (1883—1923) и двадцатипятилетия открытия им двойного оплодотворения (1898—1923). Гос. Тимирязевский научно-иссл. инст. М., 1928.

7) Журнал Русского ботанического общества при Академии Наук СССР, т. 13, 1928. Посвящение: «Инициатору объединения русских ботаников глубо-

коуважаемому академику Сергею Гавриловичу Навашину в день его 70-летия (2/14 декабря 1927 г.) с горячей благодарностью посвятило XIII т. своего журнала Русское ботаническое общество».

Памяти С. Г. Навашина предполагается посвятить такие издания:

1) Известия Киевского ботанического сада, вып. XII—XIII.

2) Переиздать все научные труды С. Г. Навашина.

3) Сборник научных статей (в международном масштабе).

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ АКАДЕМИКА С. Г. НАВАШИНА

1. Торф и торфообразователи в Московской губ. Изв. Петровск. землед. и лесн. акад., 1887, вып. I, стр. 91—117, с 3 табл.
2. Материал для бриологической флоры Пермской губ. Изв. Петровск. землед. и лесн. акад., 1888, вып. I, стр. 87—96.
3. Über das auf *Sphagnum squarrosum* Pers. parasitierende *Helotium*. Hedwigia, 1888, Bd. 27, S. 306—310, mit. Taf. XV.
4. О нахождении *Gymnosporangium tremelloides* R. Htg. под Москвой. Scripta Botanica, 1889, t. II, стр. 173—177.
5. О географическом распространении видов *Sphagnum* в средней России. Тр. СПб. общ. ест. 1889, т. 20, стр. 37—39, сообщ. (19 IV 1889).
6. *Atrichum fertile* n. sp. Hedwigia, 1889, S. 359—361, mit. Taf. XII.
7. Was sind eigentlich die sogenannten Microsporen der Torfmoose? Bot. Cbl., 1890, Bd. 43, № 9, S. 289—290.
8. О новой форме *Puccinia* на *Stipa pennata*. Тр. СПб. общ. ест., 1892, т. 22. Отд. бот., проток., стр. 28—29 (зас. 19 XII 1891).
9. О процессе оплодотворения у березы. Тр. СПб. общ. ест., 1893, т. 23. Отд. бот., проток., стр. 32—34 (зас. 18 XI 1892).
10. О новой головне (*Tilletia* (?) *Sphagni*), паразитирующей в коробочках торфяных мхов. Тр. СПб. общ. ест., 1893, т. 23. Отд. бот., стр. 56—64, с 1 табл. рис.
11. Склеротиния березы (*Sclerotinia Betulae* Woron. Болезнь сережек березы. Тр. СПб. общ. ест., 1893, т. 23. Отд. бот., стр. 100—173, с 4 табл. рис.
12. Причины невсхожести семян березы и ольхи. Изв. Петр. с.-х. акад., 1893, вып. II, стр. 124—127.
13. О двух новых склеротиниях сухих плодов (ольхи и багульника). Сообщение. Дн. IX съезда русск. естеств. и врачей, № 5, стр. 6 (2-е зас. секции ботан. 6 I 1894).
14. История развития зародыша березы в связи с данными морфологии хвойных и казуариновых. Ibid., № 7, стр. 14 (зас. 8 I 1894).
15. Zur Embryobildung der Birke (Vorläufige Mitteilung). Mél. biol. tirés du Bull. de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg, 1894, t. 13, pp. 345—348.— Отд. отт. 1902 г.
16. Краткий отчет о продолжении наблюдений над оплодотворением в семействе березовых. Тр. СПб. Общ. ест., 1894, т. 24. Отд. бот., проток., стр. 11—13 (зас. 22 IX 1893).
17. Реферат о работе Клебана. Тр. СПб. общ. ест., 1894, т. 24. Отд. бот., проток., стр. 19 (зас. 20 X 1893).
18. О возникновении микроскопического изображения по Аббе. Ibid., 1894, т. 24. Отд. бот., проток., стр. 32 (зас. 15 XII 1893).
19. Über eine neue *Sclerotinia*, verglichen mit *Sclerotinia Rhododendri* Fischer. Ber. d. Deutsch. bot. Ges., 1894, Bd. 12, H. 5, S. 117—119.

20. Kurzer Bericht meiner fortgesetzten Studien über die Embryologie der Betulineen. Ibid., 1894, Bd. 12, H. 7, S. 163—169. Mit einem Holzschn.
21. Über die Brandkrankheit der Torfmoose. Mél. biolog. tirés du Bull. de l'Acad. des. Sc. de Pétersbourg, 1894, t. 13, livr. 3, S. 349—358. Mit 1 Taf.
22. Über die gemeine Birke (*Betula alba* L.) und die morphologische Deutung der Chalazogamie. Mém. de l'Acad. d. Sc. de Pétersbourg, 1894, VII sér. t. 42, № 12, pp. I—III + I—40. Mit VI Taf. und 1 Holzschn. im Texte.
23. Новые данные по эмбриологии орешника *(Corylus Avellana)*. Проток. зас. СПб. общ. ест., № 5, сент., 1895, стр. 11—15 (зас. 22 III 1895).
24. Новые наблюдения над ростом пыльцевой трубки у видов *Ulmus*. Ibid., № 8, декабрь 1895, стр. 14—15 (зас. 15 XI 1895).
25. Об обыкновенной березе и морфологическом значении халацогамии. Тр. СПб. общ. ест., 1895, т. 25. Отд. бот., стр. 1—61, с политип. и 6 табл. рис. (на заглавн. листе работы, внизу: «Петербург, 1894»).
26. О морфологическом значении семяпочек у березовых (*Betulinae*). Сообщение. Ibid., проток. стр. 3—4 (зас. 16 II 1894).
27. Об оплодотворении у вяза и орешника. Сообщение. Ibid., проток., стр. 23—25 (зас. 21 IX 1894).
28. О статье Э. Фишер «Die Sklerotienkrankheit der Alpenrosen von Ed. Ficher aus den Berichten der Schweizer botan. Gesell., H. IV, 1894». Сообщ. Ibid., проток., стр. 2 (зас. 16 II 1894).
29. Ein neues Beispiel der Chalazogamie. Bot. Cbl., 1895, Bd. 63, № 12, S. 353—357 (V. M.).
30. Neue Ergebnisse über die Embryologie der Hasel (*Corylus Avellana*). Bot. Cbl., 1895, Bd. 63, S. 104—106.
31. (Совместно с М. Ворониным). *Sclerotinia heteroica*. Zschr. f. Pflanzenkrankh., 1896, S.S. 129—140, 199—207, mit. 2 Taf. III und IV.
32. Мхи средней России. Вып. 1, Киев, 1897, I—VI + 1—69.
33. Об оплодотворении у *Juglans*. Тр. СПб. общ. ест., 1897, т. 28, стр. 1—4, отд. отт.
34. Низшие организмы, как возбудители опухолевидных новообразований у растений. Русск. арх. патол., клин. медиц. и бактериол., 1897, т. IV, вып. 2, стр. 215—223.
35. Über die Sporenausschleuderung bei den Torfmoosen. Flora, 1897, Bd. 83, S. 151—159. mit Taf. IV.
36. Новые наблюдения над оплодотворением у *Fritillaria tenella* и *Lilium martagon*. Первое сообщение о двойном оплодотворении. Дневн. X Съезда русск. естест. и врачей, 1898, № 6, стр. 164.
37. Развитие семяпочки и путь пыльцевой трубки у горной ольхи (*Alnus viridis* DC.). Сообщение. Ibid., 1898, № 7, стр. 244.
38. Новый случай нетипического кариокинеза. Сообщ. Ibid., 1898, № 9, стр. 363.
39. Resultate einer Revision der Befruchtungsvorgänge bei *Lilium martagon* und *Fritillaria tenella*. Bull. de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg, 1898, novembre, t. 9, № 4, pp. 377—382.
40. Über das Verhalten des Pollenschlauches bei der Ulme. Bull. de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg. 1898, mai, t. 8, № 5, pp. 345—358, mit 1 Taf.
41. Neue Beobachtungen über Befruchtung bei *Fritillaria tenella* und *Lilium martagon*. Bot. Cbl., 1899, Bd. 77, S. 62.
42. Die Entwicklung der Samenknospe und über den Weg des Pollenschlauches bei *Alnus viridis*. Bot. Cbl., 1899, Bd. 77.
43. Zur Entwicklungsgeschichte der Chalazogamen. *Corylus Avellana* L. Bull. de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg, 1899. t. 10, № 4, pp. 375—391, mit 2 Taf.
44. Beobachtungen über den feineren Bau und Umwandlungen von *Plasmodiophora Brassicae* Woron. im Laufe ihres intracellularen Lebens. Flora, 1899, Bd. 86, S. 404—427, mit Taf. XX.

45. Единицы жизни. Речь, произнесенная С. Г. Навашиным на годичном акте Киевского университета 16 января 1900 г. Унив. известия, Киев. 1900, № 4, стр. 1—14.
46. О тонком строении и превращениях *Plasmodiophora Brassicae* Woron. в течение ее внутриклеточного развития. Русск. арх. патол., клинич. медиц. и бактериол., 1900, т. IX, вып. 6, стр. 624—643, с двойной табл. рис.
47. Об оплодотворении у сложноцветных и орхидных. Bull. de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg, 1900, t. 13, № 3, стр. 335—340, с 1 табл. (предв. сообщение).
48. Отчет о командировке в Бейтензорг, на о. Яве. Ibid., 1900, т. 13, № 5, стр. 517—525.
49. Über die Befruchtungsvorgänge bei einigen Dicotyledonen. Ber. d. Deutsch. bot. Ges., 1900, Bd. 18, H. 5, S. 224—230, mit Taf. IX.
50. Заметка о легком и точном способе корригирования объективов с большими отверстиями. Зап. Киевск. общ. ест., 1901.
51. Диморфизм ядер у *Plasmodiophora Brassicae*. Ibid., 1901.
52. Заметка по поводу новой работы Трейба о женском органе и апогамии у *Balanophora elongata*. Ibid., 1901.
53. (Совместно с Hohnbaum, E.). Index seminum ex horto Kiewensi anno 1902 collectorum. Университетск. изв. 1903.
54—57. То же. Ibid., 1904, 1905, 1906, 1907.
58. Michael Woronin. Ber. d. Deutsch. bot. Ges. 1903, Bd. 21, H., 1. S. 35—47.
59. О сперматогенезе у лилии. Проток. зас. Киевск. общ. ест., 1904.
60. О развитии антерозоидов у лилии и о способности их к движению. Зап. Киевск. общ., ест., 1905, т. 19, проток., стр. XXXIV (доклад на зас. 10 XI 1902).
61. Über das selbständige Bewegungsvermögen der Spermakerne bei einigen Angiospermen. Öst. bot. Ztschr., 1909, Bd. 59, № 12, S. 457—467, mit Taf. VIII.
62. О самостоятельной подвижности мужских половых ядер у некоторых покрытосеменных растений. Зап. Киевск. общ. ест., 1910, т. 20, вып 4, стр. 321—336, с 1 двойной табл. рис. (отд. отт., 1909).
63. О некоторых явлениях при слиянии ядер в зародышевом мешке после оплодотворения и замечания о типическом делении ядер у *Fritillaria tenella*. Прот. зас. Киевск. общ., ест., 3 IV 1910, стр. 6—7.
64. Наблюдения над делением ядер в соматических клетках у *Fritillaria tenella*. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 18 IX 1910, стр. 12—15.
65. Näheres über die Bildung der Spermakerne bei *Lilium martagon*. Ann. jard. bot. de Buitenzorg, 1910, 3, Suppl. 2, pp. 871—904, Taf. 33—34 (Treub-Festschrift).
66. О новых или малоизвестных методах в применении к исследованию строения и деления клеточного ядра. Проток. зас. Киевск. общ. ест., 11 XII 1910, стр. 27—31.
67. Подробности об образовании мужских половых ядер у *Lilium martagon*. Зап. Киевск. общ. ест., 1911, т. 21, вып. 4, стр. 119—151, с 2 табл. (отд. отт. 1910).
68. Об индивидуальных и видовых отличиях хромозом. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 19 II 1911, стр. 25—27.
69. О научных заслугах В. И. Беляева в области морфологии и цитологии. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 19 XI 1911, стр. 80—88.
70. Über eine Art der Chromatindiminution bei *Tradescantia virginica*. Ber. d. Deutsch. bot. Ges., 1911, Bd. 29, H. 7, S. 437—449, mit Taf. XVI (V. M.).
71. О диморфизме ядер в соматических клетках у *Galtonia candicans*. Изв. Ак. Наук, 1912, т. 6, № 4, стр. 373—385.
72. О диморфизме клеточных ядер в корешках *Galtonia candicans* в связи с вопросом о дифференциации полов у растений. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 4 II 1912, стр. 12—15.
73. Новые наблюдения над превращением клеточного ядра у *Galtonia candicans*. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 29 IX 1912, стр. 28—33.

74. (Совместно с В. В. Финном). К истории развития халацогамных. *Juglans nigra* и *Juglans regia*. Зап. Киевск. общ. ест., 1912, т. 22, вып. 3—4, стр. 1—85, с 4 двойными табл.

75. Гетеро- и идиохромозомы у растений в связи с вопросом об определении пола у животных. Проток. зас. Киевск. общ. ест., 26 X 1913, стр. 44—55.

76. (Совместно с В. В. Финном). Zur Entwicklungsgeschichte der Chalazogamen. *Juglans regia* und *Juglans nigra*. Mém. de l'Acad. d. Sc. St.-Pétersbourg, 1913, 8 sér. t. 31, № 9, pp. 1—59, mit 4 Taf.

77. Zellkerndimorphismus bei *Galtonia candicans* und einigen verwandten Monokotylen. Verh. deutsch. Naturf. u. Ärzte 85. Vers. Wien. Lpz. 1914.

78. Индивидуальные вещества в опытах над наследственностью. Природа, июль—август 1914, стр. 833—843.

79. Инфекционные болезни растений. Отт., стр. 1—23, глава в учебнике микробиологии Тарасевича. 1914—1915.

80. Заметка о числе хромозом в клеточном ядре у *Najas major*. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 8 II 1914, стр. 44—47.

81. Ядерный диморфизм и расовые видоизменения. Прот. зас. Киевск. общ. ест., 15 XI 1914, стр. 77—87.

82. Гетеро- и идиохромозомы растительного ядра, как причина ядерного диморфизма некоторых видов растений, и значение ядерного диморфизма в процессе видообразования Изв. Ак. Наук. 1915, № 17, стр. 1821—1834 (предв. сообщ.).

83. Дополнение к докладу: «Заметка о числе хромозом в клеточном ядре у *Najas major*» (сообщение). Прот. зас. Киевск. общ. ест за 1915 г., стр. 64 (протокол от 9 V 1915).

84. Принцип преемственности и новые методы в учении о клетке высших растений. Журн. Русск. бот. общ., 1916, т. I, № 1—2, стр. 1—38, с 7 рис. в тексте.

85. О некоторых признаках внутренней организации хромозом. Сборник статей, посвященный К. А. Тимирязеву, стр. 185—214, с 2 табл. и 1 рис. М. 1916.

86. Редукционное деление перед образованием спор у *Plasmodiophora Brassicae* Woron. ДАН-А, 26 XI 1924.

87. Единицы жизни. Тр. Гос. Тимирязевского научно-иссл. инст., серия II, проток. совета инст., вып. № 2, 25 стр. Вологда, 1925.

88. О парном сочетании хромозом при делении соматических клеток. ДАН-А, 26 V 1926, стр. 142—144.

89. Нео-менделизм. Гос. Тимир. научно-иссл. инст., серия V. Библиотека материалиста, вып. № 2, 42 стр. с 7 табл. в тексте. Вологда, 1926.

90. Пол—фактор органической эволюции. Гос. Тимир. научно-иссл. инст., Серия IX. «На пути к материализму». Вып. № 14, 37 стр. Вологда, 1926.

91. Э. Б. Вильсон. Физическая основа жизни. Перевод с англ. С. Г. Навашина. Гос. Тимир. научно-иссл. инст., серия V. Библиотека материалиста. Вып. № 4, 54 стр., с 20 рис. в тексте. Вологда, 1927 (с предисловием переводчика).

92. Опыт структурного изображения свойств половых ядер. Юбил. сборн., посвящ. И. П. Бородину, стр. 94—114. Лгр., 1927, с одной диаграммой.

93. Zellkerndimorphismus bei *Galtonia candicans* Des. und einigen verwandten Monokotylen. Ber. d. Deutsch. bot. Ges., 1927, Bd. 45, H. 7, S. 415—428, mit Taf. VI.

94. Сергей Гаврилович Навашин (автобиография). Журн. Русск. бот. общ., 1928, т. 13, № 1—2, стр. 7—14, с 2 портретами.

95. Об образовании так называемых «хроматиновых телец.» Тр. Гос. Тимирязевского научно-исследоват. института (печатается), стр. 1—25, с 20 рис.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О МЕТОДЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА СОСТАВЛЕНИЯ ВЕКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Н. Н. ЛУЗИНА

§ 1. В своей работе: «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем», помещенной в «Известиях Академии Наук СССР» за 1931 г., акад. А. Н. Крылов изложил замечательную методу составления векового уравнения непосредственно в виде такого определителя, в котором неизвестная λ располагается только в одном первом столбце этого определителя, все же остальные элементы его суть известные постоянные. Ввиду того, что λ уже не является расположенной по диагонали, самое развитие такого определителя никаких трудностей не представляет. В этом важном обстоятельстве и состоит преимущество методы акад. А. Н. Крылова.

При составлении векового уравнения акад. А. Н. Крылов опирается на свойства дифференциальных уравнений. Вследствие этого сам автор, заканчивая развитие своей методы, указывает на некоторый интерес освобождения изложения этой методы от аппарата дифференциальных уравнений и на возможность получения данной им формы векового уравнения, исходя из обычной диагональной, при помощи чисто алгебраических преобразований.

В предлагаемой статье мы не имеем в виду дать дальнейшее углубление методы акад. А. Н. Крылова: ее цель лишь интерпретировать алгебраически ход идей автора этой методы.

§ 2. «Вековым уравнением» называется уравнение вида:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots a_{kk}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

где λ есть неизвестная и где все a_{ij} суть известные постоянные. Заметим здесь же, что в целях общности мы не будем предполагать между этими постоянными непременного соотношения $a_{ij}=a_{ji}$.

Говоря теоретически, вековое уравнение (1) может быть написанным в виде обычного алгебраического уравнения степени k относительно λ

$$(-1)^k\lambda^k+(-1)^{k-1}S_1\lambda^{k-1}+(-1)^{k-2}S_2\lambda^{k-2}+\dots+S_k=0, \qquad (2)$$

где коэффициенты $S_1, S_2, \dots, S_k$ составляются по следующему известному правилу: чтобы иметь S_p для $1\leqslant p\leqslant k$ нужно взять сумму всех главных миноров (Hauptminor) с p столбцами определителя A

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Иначе говоря, коэффициент S_p пишется в виде:

$$S_p=\sum\begin{vmatrix} a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2} & a_{r_1r_3} & \dots & a_{r_1r_p} \\ a_{r_2r_1} & a_{r_2r_2} & a_{r_2r_3} & \dots & a_{r_2r_p} \\ a_{r_3r_1} & a_{r_3r_2} & a_{r_3r_3} & \dots & a_{r_3r_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_pr_1} & a_{r_pr_2} & a_{r_pr_3} & \dots & a_{r_pr_p} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

где знак суммы $\sum$ распространяется на всевозможные целые числа r_1, r_2, r_3, ..., r_p, лишь бы были удовлетворены неравенства

$$1 \leqslant r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_p \leqslant k. \tag{5}$$

Эта чисто теоретическая возможность написать вековое уравнение (1) в виде алгебраического уравнения (2) в действительности сильно ограничена, так как даже в случае сравнительно небольшого k формулы (4), определяющие коэффициенты S_p становятся невычислимыми.* Именно по этой причине Лапласом, Леверрье и Якоби в свое время были предложены другие методы составления векового уравнения, в обход формул (4).

§ **3.** К сожалению методы эти на деле оказались сложными и неудобными. В целях устранения их громоздкости акад. А. Н. Крыловым была развита другая метода: метода уже прямого составления векового уравнения в виде определителя

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c & \ldots & f \\ \lambda & a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ \lambda^2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \lambda^3 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^k & a_k & b_k & c_k & \ldots & f_k \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

где $a, b, c, \ldots, f$ суть любые заданные постоянные и где другие элементы $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$ суть просто линейные формы пара-

* Можно опасаться некоторой иллюзии относительно вычислимости вообще, идущей из чисто теоретических математических работ. Так например, уже сумма N пяти чисел $N = 4 + 4^4 + 4^{4^4} + 4^{4^{4^4}} + 1$ невычислима. Согласно рассчетам астронома Эддингтона, величина небесного тела никогда не может превзойти известной строгой границы, так как в противном случае световое отталкивание превысило бы силу всемирного тяготения. Отсюда простая выкладка показывает, что для написания суммы N по десятичной системе никогда не будет достаточного количества материи. Следовательно, только одно вычисление никогда не может дать сведений относительно того, простое ли число N или составное. Было бы в высшей степени важно установить принципиальное различие вычислимого и невычислимого. Аналогично, всякий факториал $n!$ и всякий буквенный определитель порядка n становятся невычислимыми при достаточно большом n.

метров $a, b, c, \ldots, f$ с коэффициентами, выводимыми из элементов a_{ij} определителя A помощью одних только сложений и умножений.

Сам акад. А. Н. Крылов чаще всего полагает

$$a = 1, \ b = c = \ldots = f = 0,$$

что, по вычитании первого столбца из второго у определителя (6), ведет к изображению его в виде

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 - \lambda^2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ a_3 - \lambda^3 & b_3 & c_3 & \ldots & f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k - \lambda^k & b_k & c_k & \ldots & f_k \end{vmatrix} = 0, \qquad (6^*)$$

где теперь уже $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ суть известные постоянные, выводимые из элементов a_{ij} определителя A помощью сложений и умножений.

§ **4.** Вот сущность методы акад. А. Н. Крылова: согласно ей, на ряду с классической (диагональной) формой (1) векового уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, следует рассматривать вспомогательную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} q_1' = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\ q_2' = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + a_{23} q_3 + \ldots + a_{2k} q_k \\ q_3' = a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3 + \ldots + a_{3k} q_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k' = a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3 + \ldots + a_{kk} q_k \end{array}\right\} \qquad (7)$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_k$ суть функции независимой переменной t и $q_1', q_2', \ldots, q_k'$ их производные по этой переменной.

Система (7) дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество решений и, при принятых обозначениях, известно, что корнями векового уравнения (1) являются все такие числа λ и только такие числа λ, для которых имеется частное решение $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, удовлетворяющее, кроме системы (7), еще и соотношениям

$$q_1' = \lambda q_1, \quad q_2' = \lambda q_2, \ldots, q_k' = \lambda q_k. \tag{8}$$

Следует при этом добавить, что здесь никогда не рассматривается частное решение тождественное нулю.

Заметив это, акад. А. Н. Крылов вводит в рассмотрение линейную форму x от любых заданных постоянных $a, b, c, \ldots, f$, определенную равенством

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k, \tag{9}$$

где $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ есть какое-нибудь частное решение системы (7).

В указанных условиях ясно, что форма x есть, во-первых, функция независимой переменной t и, во-вторых, что x зависит формальным образом от k произвольных постоянных (других, чем постоянные

$$a, b, c, \ldots, f,$$

потому что таковые рассматриваются как уже заданные численно). В самом деле, известно, что всегда имеется такое частное решение

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k,$$

системы (7), которое при начальном значении t_0 независимой переменной t становится произвольной наперед назначенной совокупностью k чисел

$$q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots, q_k^0.$$

Поэтому, при любых заданных $a, b, c, \ldots, f$, форма x зависит формальным образом от k произвольных постоянных. Но ничто не доказывает, что эта зависимость есть зависимость по существу, т. е. что число произвольных постоянных, от которых зависит x, не может быть сведено к меньшему числу.

Таким образом форма x должна удовлетворять определенному дифференциальному уравнению порядка $\leqslant k$. Чтобы составить его, акад. А. Н. Крылов дифференцирует k раз по t равенство (9), что дает:

$$\left.\begin{array}{l} x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k \\ x' = aq_1' + bq_2' + cq_3' + \ldots + fq_k' \\ x'' = aq_1'' + bq_2'' + cq_3'' + \ldots + fq_k'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(k)} = aq_1^{(k)} + bq_2^{(k)} + cq_3^{(k)} + \ldots + fq_k^{(k)} \end{array}\right\}. \quad (10)$$

С другой стороны, самая система дифференциальных уравнений (7) указывает, что первые производные $q_1', q_2', q_3', \ldots, q_k'$ суть линейные формы от $q_1, q_2, q_3, \ldots q_k$. Следовательно, чтобы перейти от функций

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

к их первым производным $q_1', q_2', q_3', \ldots, q_k'$ должна быть выполненной линейная подстановка, определяемая матрицей A:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kk} \end{array} \right\|. \quad (11)$$

Это обстоятельство легко удержать в памяти, написав символическое равенство

$$q' = A(q). \quad (12)$$

Чтобы выразить вторые производные $q_1'', q_2'', q_3'', \ldots, q_k''$ чрез те же самые функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, дифференцируем сначала один раз по t систему (7), что дает нам выражение вторых производных чрез первые по тому же самому правилу:

$$q'' = A(q').$$

Следовательно, для получения желаемого окончательного выражения, остается только подставить выражения первых производных $q_1', q_2', q_3', \ldots q_k'$ чрез функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, что приводит к символическому равенству

$$q'' = A[A(q)] = A^2(q), \tag{13}$$

выражаемому словесно следующим образом: чтобы перейти от функций

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

к их вторым производным $q_1'', q_2'', q_3'', \ldots, q_k''$ должна быть проделана дважды линейная подстановка A. Иначе говоря, над $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ должна быть проделана одна линейная подстановка, определяемая квадратом матрицы A:

$$A^2 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \ldots a_{kk} \end{matrix} \right\|^2. \tag{14}$$

Аналогично, чтобы иметь выражение третьих производных

$$q_1''', q_2''', q_3''', \ldots, q_k'''$$

чрез функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, дифференцируем дважды систему (7). Это нам дает

$$q''' = A(q'').$$

Сопоставление с равенством (13) нас приводит к равенству

$$q''' = A^3(q) \tag{15}$$

и так далее.

Ничто, очевидно, не препятствует повторять этот процесс безгранично далеко. Таким образом мы приходим к следующему правилу: чтобы иметь выражения p-ых производных $q_1^{(p)}, q_2^{(p)}, q_3^{(p)}, \ldots, q_k^{(p)}$ чрез

функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, нужно проделать над этими функциями p раз линейную подстановку A или, что является тем же самым, один раз линейную подстановку, определяемую p-ой степенью матрицы A:

$$A^p = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \ldots a_{kk} \end{Vmatrix}^p. \qquad (16)$$

Здесь p было целым числом, превышающим нуль. Чтобы распространить сказанное на случай $p=0$, следует, как обычно, рассматривать единичную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix},$$

как нулевую степень A^0 матрицы A.

Установив это, возвратимся к равенствам (10). Производя замену всех входящих в эти равенства производных $q_i^{(p)}$ указанными выражениями их чрез функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, мы напишем равенства (10) в виде

$$\left.\begin{array}{l} x = a\,q_1 + b\,q_2 + c\,q_3 + \ldots + f\,q_k \\ x' = a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 + \ldots + f_1 q_k \\ x'' = a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 + \ldots + f_2 q_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(k)} = a_k q_1 + b_k q_2 + c_k q_3 + \ldots + f_k q_k \end{array}\right\}, \qquad (17)$$

где коэффициенты $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$ суть известные постоянные, независящие от переменной t.

Для дальнейшего важно иметь твердое правило составления коэффициентов $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$. С этой целью напишем матрицу (16) в виде

$$A^p = \left\| \begin{matrix} a_{11}^{(p)} & a_{12}^{(p)} & a_{13}^{(p)} & \ldots & a_{1k}^{(p)} \\ a_{21}^{(p)} & a_{22}^{(p)} & a_{23}^{(p)} & \ldots & a_{2k}^{(p)} \\ a_{31}^{(p)} & a_{32}^{(p)} & a_{33}^{(p)} & \ldots & a_{3k}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}^{(p)} & a_{k2}^{(p)} & a_{k3}^{(p)} & \ldots & a_{kk}^{(p)} \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

Известное правило составления произведения двух матриц («строки левого множителя на столбцы правого») показывает, что элементы матрицы (18) суть однородные функции p-ой степени от элементов a_{ij} матрицы A с целыми неотрицательными коэффициентами.

Из предшествовавших рассуждений следует, что элементы s-ой строки матрицы (18) являются ничем иным, как соответствующими коэффициентами изображения $q_s^{(p)}$ в виде линейной формы от функций $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$:

$$q_s^{(p)} = a_{s1}^{(p)} q_1 + a_{s2}^{(p)} q_2 + a_{s3}^{(p)} q_3 + \ldots + a_{sk}^{(p)} q_k. \tag{19}$$

С другой стороны, из равенств (10) следует, что

$$x^{(p)} = aq_1^{(p)} + bq_2^{(p)} + cq_3^{(p)} + \ldots + fq_k^{(p)}. \tag{20}$$

Равенство (20) показывает, что для того, чтобы иметь выражение $x^{(p)}$ в виде линейной формы от $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, нужно в равенстве (19) последовательно полагать $s = 1, 2, 3, \ldots, k$ и, умножая обе части его соответственно на $a, b, c, \ldots f$, все получившееся сложить. И так как окончательным выражением, согласно формулам (17) должно явиться выражение

$$x^{(p)} = a_p q_1 + b_p q_2 + c_p q_3 + \ldots + f_p q_k, \tag{21}$$

то отсюда заключаем о следующем правиле составления коэффициентов

$$a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p:$$

для того, чтобы получить коэффициенты $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ нужно строку параметров

$$a,\ b,\ c, \ldots, f$$

последовательно умножать на столбцы матрицы A^p (18).

Таким образом, мы приходим к формулам:

$$\left.\begin{array}{l} a_p = a_{11}^{(p)} a + a_{21}^{(p)} b + a_{31}^{(p)} c + \ldots + a_{k1}^{(p)} f \\ b_p = a_{12}^{(p)} a + a_{22}^{(p)} b + a_{32}^{(p)} c + \ldots + a_{k2}^{(p)} f \\ c_p = a_{13}^{(p)} a + a_{23}^{(p)} b + a_{33}^{(p)} c + \ldots + a_{k3}^{(p)} f \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p = a_{1k}^{(p)} a + a_{2k}^{(p)} b + a_{3k}^{(p)} c + \ldots + a_{kk}^{(p)} f \end{array}\right\}, \qquad (22)$$

где p есть любое из чисел $1, 2, 3, \ldots, k$.

Формулы (22) показывают, что коэффициенты $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ суть линейные формы от параметров $a, b, c, \ldots, f$ и суть однородные функции p-ой степени от элементов a_{ij} матрицы A с целыми неотрицательными коэффициентами.

Установив это, возвратимся к равенствам (17), которые можно рассматривать, как систему $k+1$ уравнений, линейных относительно k функций $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$. Исключение этих функций из равенств (17) дает акад. А. Н. Крылову искомое дифференциальное уравнение для x в виде определителя $k+1$-го порядка

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} x & a & b & c & \ldots & f \\ x' & a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ x'' & a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ x''' & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(k)} & a_k & b_k & c_k & \ldots & f_k \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Развивая этот определитель по элементам первого столбца, мы получаем

$$(-1)^k Mx^{(k)} + (-1)^{k-1} M_1 x^{(k-1)} + (-1)^{k-2} M_2 x^{(k-2)} + \\ + \ldots + (-1) M_{k-1} x' + M_k x = 0, \tag{24}$$

где старший коэффициент M определяется формулой

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots f_{k-1} \end{vmatrix}. \tag{I}$$

Приняв во внимание сказанное выше относительно состава коэффициентов $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$, мы заключаем, что множитель M есть однородная функция степени k-ой от параметров $a, b, c, \ldots, f$ и вместе с тем есть однородная функция степени $\frac{(k-1)k}{2}$ от элементов a_{ij} матрицы A с целыми коэффициентами, могущими быть и отрицательными.

Выяснение строения множителя M является важным, так как он играет весьма существенную роль в теории акад. А. Н. Крылова.

Установив это, возвратимся теперь к дифференциальному уравнению (24). Здесь прежде всего важно установить, что равенство (24) есть в самом деле дифференциальное уравнение, определяющее переменную x, а не тождество, справедливое всегда, какова бы ни была функция x независимой переменной t. Это последнее обстоятельство наступит, очевидно, тогда и только тогда, когда будем иметь одновременно

$$M = M_1 = M_2 = \cdots = M_{k-1} = M_k = 0. \tag{25}$$

Легко констатировать случаи, когда множитель M заведомо отличен от нуля при надлежащем выборе численных величин

параметров $a, b, c, \ldots, f$. Это есть прежде всего случай, рассмотренный акад. А. Н. Крыловым, когда вековое уравнение (1) не имеет кратных корней.

Чтобы убедиться в этом допустим, что корни

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k \tag{26}$$

векового уравнения (1) попарно различны. Известно, что в этих условиях система (7) допускает в точности k основных частных решений, располагающихся в таблицу

$$\left\|\begin{matrix} \beta_{11} e^{\lambda_1 t} & \beta_{12} e^{\lambda_1 t} & \beta_{13} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \beta_{1k} e^{\lambda_1 t} \\ \beta_{21} e^{\lambda_2 t} & \beta_{22} e^{\lambda_2 t} & \beta_{23} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \beta_{2k} e^{\lambda_2 t} \\ \beta_{31} e^{\lambda_3 t} & \beta_{32} e^{\lambda_3 t} & \beta_{33} e^{\lambda_3 t} & \ldots & \beta_{3k} e^{\lambda_3 t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} e^{\lambda_k t} & \beta_{k2} e^{\lambda_k t} & \beta_{k3} e^{\lambda_k t} & \ldots & \beta_{kk} e^{\lambda_k t} \end{matrix}\right\|, \tag{27}$$

в которой частные решения выписаны в строках, столбцы же отнесены к функциям $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$. Таким образом, например, p-ое частное решение есть

$$q_1 = \beta_{p1} e^{\lambda_p t}, \quad q_2 = \beta_{p2} e^{\lambda_p t}, \ldots, q_k = \beta_{pk} e^{\lambda_p t}. \tag{28}$$

Известно также, что определитель

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots & \beta_{2k} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \ldots & \beta_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \beta_{k3} & \ldots & \beta_{kk} \end{vmatrix} \tag{29}$$

отличен от нуля, так как система частных решений (27) есть основная система.

В этих условиях общий интеграл системы (7) изобразится в виде

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = C_1 \beta_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_{21} e^{\lambda_2 t} + C_3 \beta_{31} e^{\lambda_3 t} + \ldots + C_k \beta_{k1} e^{\lambda_k t} \\ q_2 = C_1 \beta_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 \beta_{32} e^{\lambda_3 t} + \ldots + C_k \beta_{k2} e^{\lambda_k t} \\ q_3 = C_1 \beta_{13} e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_{23} e^{\lambda_2 t} + C_3 \beta_{33} e^{\lambda_3 t} + \ldots + C_k \beta_{k3} e^{\lambda_k t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k = C_1 \beta_{1k} e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_{2k} e^{\lambda_2 t} + C_3 \beta_{3k} e^{\lambda_3 t} + \ldots + C_k \beta_{kk} e^{\lambda_k t} \end{array}\right\}, \quad (30)$$

т. е. для его получения надо составить линейную комбинацию строк матрицы (27), употребив в качестве множителей этой линейной комбинации произвольные постоянные $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$.

Установив это, определим переменную x по формуле (9)

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k, \quad (9)$$

в которой функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ даны равенствами (30). Для этой цели мы помножаем равенства (30) соответственно на $a, b, c, \ldots, f$ и складываем. Это нас приведет к равенству

$$x = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t} + C_3' e^{\lambda_3 t} + \ldots + C_k' e^{\lambda_k t}, \quad (31)$$

где постоянные $C_1', C_2', C_3', \ldots, C_k'$ определяются формулами:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' = C_1 (a\beta_{11} + b\beta_{12} + c\beta_{13} + \ldots + f\beta_{1k}) \\ C_2' = C_2 (a\beta_{21} + b\beta_{22} + c\beta_{23} + \ldots + f\beta_{2k}) \\ C_3' = C_3 (a\beta_{31} + b\beta_{32} + c\beta_{33} + \ldots + f\beta_{3k}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_k' = C_k (a\beta_{k1} + b\beta_{k2} + c\beta_{k3} + \ldots + f\beta_{kk}) \end{array}\right\} \quad (32)$$

которые можно написать в виде

$$C_1' = C_1 \cdot \gamma_1, \; C_2' = C_2 \cdot \gamma_2, \; C_3' = C_3 \cdot \gamma_3, \ldots, C_k' = C_k \cdot \gamma_k \quad (33)$$

положив

$$\left.\begin{aligned} a\beta_{11}+b\beta_{12}+c\beta_{13}+\ldots+f\beta_{1k}&=\gamma_1\\ a\beta_{21}+b\beta_{22}+c\beta_{23}+\ldots+f\beta_{2k}&=\gamma_2\\ a\beta_{31}+b\beta_{32}+c\beta_{33}+\ldots+f\beta_{3k}&=\gamma_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a\beta_{k1}+b\beta_{k2}+c\beta_{k3}+\ldots+f\beta_{kk}&=\gamma_k \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Заметим здесь же, что в виду того, что определитель (29) отличен от нуля, равенства $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\cdots=\gamma_k=0$ возможны тогда и только тогда, когда имеем $a=b=c=\cdots=f=0$.

Дифференцируя теперь $k-1$ раз равенство (31), мы находим:

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1'e^{\lambda_1 t}+C_2'e^{\lambda_2 t}+C_3'e^{\lambda_3 t}+\ldots+C_k'e^{\lambda_k t}\\ x'&=\lambda_1 C_1'e^{\lambda_1 t}+\lambda_2 C_2'e^{\lambda_2 t}+\lambda_3 C_3'e^{\lambda_3 t}+\ldots+\lambda_k C_k'e^{\lambda_k t}\\ x''&=\lambda_1^2 C_1'e^{\lambda_1 t}+\lambda_2^2 C_2'e^{\lambda_2 t}+\lambda_3^2 C_2'e^{\lambda_3 t}+\ldots+\lambda_k^2 C_k'e^{\lambda_k t}\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^{(k-1)}&=\lambda_1^{k-1} C_1'e^{\lambda_1 t}+\lambda_2^{k-1} C_2'e^{\lambda_2 t}+\lambda_3^{k-1} C_3'e^{\lambda_3 t}+\ldots+\lambda_k^{k-1} C_k'e^{\lambda_k t} \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Из равенств (35) легко выводится то важное следствие, что если численные величины параметров $a, b, c, \ldots, f$ выбраны таким образом, что ни одно из количеств $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ не равно нулю, то определитель M (I) заведомо отличен от нуля

$$M \neq 0. \qquad (36)$$

Чтобы показать это, предположим, что ни одно из количеств

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k,$$

определенных равенствами (34) не равно нулю, и вместе с тем предположим, что определитель M (I) есть нуль.

В этом случае должна иметься система k чисел

$$q_1^0, \ q_2^0, \ q_3^0, \ \ldots, q_k^0 \qquad (37)$$

из которых не все суть нули, такая, что будут одновременно удовлетворены равенства

$$\left.\begin{array}{l} a\,q_1^0 + b\,q_2^0 + c\,q_3^0 + \ldots + f\,q_k^0 = 0 \\ a_1 q_1^0 + b_1 q_2^0 + c_1 q_3^0 + \ldots + f_1 q_k^0 = 0 \\ a_2 q_1^0 + b_2 q_2^0 + c_2 q_3^0 + \ldots + f_2 q_k^0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1} q_1^0 + b_{k-1} q_2^0 + c_{k-1} q_3^0 + \ldots + f_{k-1} q_k^0 = 0 \end{array}\right\} . \qquad (38)$$

С другой стороны, формулы (30) дают общий интеграл системы (7). Это значит, что постоянные C_1, C_2, C_3, ..., C_k могут быть подобраны таким образом, что при начальном значении t_0 независимой переменной t функции $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, определенные по формулам (30), становятся численно равными любой выбранной заранее совокупности k чисел. Подберем же постоянные C_1, C_2, C_3, ..., C_k так, чтобы при $t = t_0$ мы бы имели

$$q_1 = q_1^0, \ q_2 = q_2^0, \ q_3 = q_3^0, \ldots, q_k = q_k^0 \qquad (39)$$

Следует здесь же заметить, что так как не все $q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots, q_k^0$ суть нули, то и не все постоянные $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ равны нулю.

Обратившись теперь к равенствам (17) и сопоставив их с равенствами (38), мы усматриваем, что имеем

$$x = x' = x'' = x''' = \cdots = x^{(k-1)} = 0 \qquad (40)$$

при $t = t_0$. Отсюда, равенства (35) необходимо должны дать

$$C_1' = C_2' = C_3' = \cdots = C_k' = 0, \qquad (41)$$

потому что определитель системы (35) есть определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots \lambda_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (42)$$

отличный, как известно, от нуля, так как, согласно предположению, среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ векового уравнения (1) нет равных.

В силу того, что ни одно из количеств $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ не есть нуль, сопоставление равенств (41) и (33) необходимо приводит к равенствам

$$C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_k = 0, \tag{43}$$

противоречащим только что сказанному относительно этих постоянных.

Таким образом: выбирая численные величины параметров $a, b, c, \ldots, f$ так, чтобы ни одно из количеств $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ не обратилось в нуль, мы заведомо будем иметь неравенство

$$M \neq 0.$$

В виду того, что определитель (29) отличен от нуля, система линейных уравнений (34) разрешима при всяких численных величинах количеств

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k.$$

Следовательно можно выбрать бесчисленным числом способов численные величины параметров $a, b, c, \ldots, f$ так, чтобы имелось неравенство

$$M \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

В случае $k = 3$ сказанное можно интерпретировать геометрически. В этом случае параметры a, b, c можно рассматривать как координаты некоторой точки P Евклидовского трехмерного пространства. Уравнения (34), положив $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, обратятся в уравнения 3-х различных плоскостей

$$\Pi_1, \; \Pi_2 \text{ и } \Pi_3.$$

проходящих чрез начало координат. Следовательно, стоит только взять точку P вне этих трех плоскостей Π_1, Π_2, Π_3, как определитель M будет заведомо отличен от нуля: $M \neq 0$. Если плоскости Π_1, Π_2, Π_3 все мнимые, тогда определитель M отличен от нуля при любом выборе вещественных величин параметров a, b, c, лишь бы не было взято

$$a = b = c = 0.$$

В этом случае определитель M является, очевидно, знакопостоянной формой параметров a, b, c.

При $k > 3$ можно еще сохранить геометрический язык, рассматривая пространства k измерений.

Возвратимся теперь к дифференциальному уравнению (24), предположив отсутствие кратных корней у векового уравнения (1). Следовательно, при указанном только что выборе численных величин параметров

$$a, b, c, \ldots, f,$$

мы будем иметь

$$M \neq 0.$$

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$$

корни векового уравнения (1). Возьмем какой-нибудь из этих корней λ_p и рассмотрим соответствующее частное решение (28) системы (7). Формула (9) в этом случае нам дает

$$x = \gamma_p e^{\lambda_p t}, \tag{44}$$

где постоянные γ_p определено равенством (34) и, значит, в силу предположения о выборе численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, мы будем иметь

$$\gamma_p \neq 0. \tag{45}$$

Подставим величину x, определенную равенством (44) в дифференциальное уравнение (24). По сокращении множителей γ_p и $e^{\lambda_p t}$, отличных от нуля, мы получаем равенство

$$(-1)^k M \lambda_p^k + (-1)^{k-1} M_1 \lambda_p^{k-1} + (-1)^{k-2} M_2 \lambda_p^{k-2} + \\ + \ldots + (-1) M_{k-1} \lambda_p + M_k = 0. \tag{46}$$

Равенство (46) показывает, что алгебраическое уравнение k-ой степени

$$(-1)^k M \lambda^k + (-1)^{k-1} M_1 \lambda^{k-1} + (-1)^{k-2} M_2 \lambda^{k-2} + \\ + \ldots + (-1) M_{k-1} \lambda + M_k = 0 \tag{47}$$

со старшим коэффициентом M заведомо отличным от нуля удовлетворено корнем λ_p векового уравнения (1). И так как число p есть произвольное из чисел $1, 2, 3, \ldots, k$, то отсюда следует, что алгебраическое уравнение (47) тождественно, до множителя M, с раскрытым видом (2) векового уравнения (1).

Следовательно, мы должны иметь равенства

$$\frac{M_1}{M} = S_1, \quad \frac{M_2}{M} = S_2, \ldots, \quad \frac{M_{k-1}}{M} = S_{k-1}, \quad \frac{M_k}{M} = S_k. \tag{48}$$

Из сказанного ясно, что мы должны иметь равенство, справедливое при любом значении переменной λ:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \ldots f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots f_{k-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \ldots f \\ \lambda & a_1 & b_1 & c_1 \ldots f_1 \\ \lambda^2 & a_2 & b_2 & c_2 \ldots f_2 \\ \lambda^3 & a_3 & b_3 & c_3 \ldots f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^k & a_k & b_k & c_k \ldots f_k \end{vmatrix} \tag{II}$$

лишь бы определитель с λ, стоящий в левой части, имел все корни различными и лишь бы численные величины параметров $a, b, c, \ldots, f$ были выбраны так, чтобы ни одно из количеств $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_k$, определенных равенствами (34), не было равно нулю.

Легко теперь освободиться от всех этих ограничений и показать, что равенство (II) есть тождество, справедливое, следовательно, каковы бы ни были переменная λ, параметры $a, b, c, \ldots f$ и элементы a_{ij} матрицы A.

Употребим для этой цели рассуждение «по непрерывности»: обе части равенства (II) суть многочлены от параметров $a, b, c, \ldots, f$ и от элементов a_{ij}. Следовательно, это суть непрерывные функции указанных букв, изменяющиеся непрерывно при непрерывном изменении численных значений указанных букв. Но этим непрерывным изменением всегда можно подвести случай неравных корней λ_p векового уравнения (1) и количеств γ_i отличных от нуля к тому случаю, когда вековое уравнение (1) имеет равные корни и когда некоторые или все количества γ_i суть нули — как к предельному случаю. Это подведение является осуществимым вследствие теоремы Коши о непрерывном изменении корней алгебраического уравнения при непрерывном изменении его коэффициентов. В самом деле, с одной стороны, в силу указанного рассуждения Коши, всякий кратный корень алгебраического уравнения можно рассматривать, как предел некоторой совокупности различных корней, число которых равно кратности рассматриваемого корня и которые стремятся к совпадению с этим кратным корнем при непрерывном изменении коэффициентов данного уравнения. С другой же стороны, коэффициенты β_{ij}, содержащиеся в формулах (34) суть сами в свою очередь непрерывные функции элементов a_{ij} матрицы A и корней векового уравнения (1). В самом деле, так как (28) есть решение системы (7), то должны иметь после подстановки функций (28) в систему (7), сокращении на $e^{\lambda_p t}$ и переноса всех членов в одну сторону:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_p)\beta_{p1}+a_{12}\beta_{p2}+a_{13}\beta_{p3}+\ldots+a_{1k}\beta_{pk}=0\\ a_{21}\beta_{p1}+(a_{22}-\lambda_p)\beta_{p2}+a_{23}\beta_{p3}+\ldots+a_{2k}\beta_{pk}=0\\ a_{31}\beta_{p1}+a_{32}\beta_{p2}+(a_{33}-\lambda_p)\beta_{p3}+\ldots+a_{3k}\beta_{pk}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k1}\beta_{p1}+a_{k2}\beta_{p2}+a_{k3}\beta_{p3}+\ldots+(a_{kk}-\lambda_p)\beta_{pk}=0\end{array}\right\}. \quad (49)$$

Отсюда следует, что количества $\beta_{p1}, \beta_{p2}, \beta_{p3}, \ldots, \beta_{pk}$, определяемые до произвольного множителя, отличного от нуля, просто могут быть приравнены адъюнктам (минорам со знаками) определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_p & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_p & a_{23} & \ldots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_p & \ldots a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots a_{kk}-\lambda_p \end{vmatrix} = 0\,, \quad (50)$$

соответствующим какой-нибудь строке этого определителя. Известно при этом, что все первые миноры этого определителя не могут быть нулями, так как, в противном случае, корень λ_p векового уравнения (1) оказался бы кратным.

И так как миноры определителя (50) суть непрерывные функции элементов a_{ij} и корней λ_p ($p = 1, 2, 3, \ldots k$), то являются соблюденными все условия применимости указанной теоремы Коши при рассматриваемом переходе к пределу.

Это рассуждение показывает, что равенство (II) акад. А. Н. Крылова есть алгебраическое тождество.

Следует здесь же заметить, что применение этого же самого рассуждения «по непрерывности» к равенствам (48), выведенным при наличии указанных ограничительных условий (различие корней λ_p, отличие от нуля количеств γ_i), обнаруживает, что мы имеем алгебраические тождества

$$M_1 = M \cdot S_1, \; M_2 = M \cdot S_2, \; \ldots, \; M_{k-1} = M \cdot S_{k-1}, \; M_k = M \cdot S_k \quad (51),$$

справедливые при всяких значениях параметров $a, b, c, \ldots, f$ и элементов a_{ij} матрицы A.

Из тождеств (51) следует, что необходимым и достаточным условием утраты дифференциальным уравнением (24) смысла является только одно равенство

$$M = 0. \quad (52)$$

Мы видим таким образом, что требование равенств (25) является излишним.

Тождество (II) акад. А. Н. Крылова указывает на то важное обстоятельство, что левая часть векового уравнения (1) при умножении его на множителя M (I) подвергается преобразованию, при котором элементы классической формы векового уравнения, (1), содержащие λ и расположенные по главной диагонали, перемещаются в первый столбец, после чего самое составление векового уравнения сводится просто к вычислению численных определителей. Такое преобразование имеет силу всякий раз, как параметры $a, b, c, \ldots, f$ имеют такие численные значения, при которых множитель M отличен от нуля: $M \neq 0$. В этом случае, как показывает тождество (II), классическое вековое уравнение (1) и вековое

уравнение (6) акад. А. Н. Крылова имеют те же самые корни и с тою же самою кратностью. Но такое преобразование перестает иметь силу, коль скоро множитель M преобразования тождественно равен нулю, т. е. уничтожается при всяких $a, b, c, \ldots, f$.

Предыдущее указывает, что этот случай не представится, если вековое уравнение (1) есть уравнение без кратных корней. Этот случай и был, в первую очередь, рассмотрен акад. А. Н. Крыловым. В конце цитированной работы автор новой методы, следуя синтетическому ходу своего изложения, после анализа примера акад. Л. И. Мандельштама и двух своих примеров, раскрывает природу того общего случая, когда имеем тождественно

$$M \equiv 0.$$

В дальнейшем будет видно, что, в самом деле, здесь явление имеет сложный характер, и что одна только кратность корней векового уравнения (1) далеко еще не влечет за собою тождества $M \equiv 0$: на тождественное обращение в нуль множителя M оказывает влияние не одна только указанная кратность корней. Но для того чтобы видеть это, нам необходима алгебраическая интерпретация методы акад. А. Н. Крылова.

§ **5.** Чтобы иметь эту интерпретацию не прибегая к аппарату дифференциальных уравнений, необходимо рассмотреть вопрос заново.

Все дело, очевидно, сводится к тому, чтобы доказать тождество (II) акад. А. Н. Крылова, являющееся, очевидно, предложением теории определителей, чисто алгебраическими средствами не прибегая к анализу бесконечно малых.

С этой целью рассмотрим формальным образом определитель M, определяемый равенством (I), не задаваясь вопросом о его происхождении. Мы предполагаем, что элементы $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ определителя M составляются по формулам (22), полагаемым a priori; в этих формулах $a, b, c, \ldots, f$ обозначают произвольные параметры и $a_{ij}^{(p)}$ элементы матрицы A^p (18), т. е. p-ой степени матрицы A.

Прежде всего отыщем взаимоотношение между p-ой и $p+1$-ой строками определителя M, т. е. между количествами $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ и $a_{p+1}, b_{p+1}, c_{p+1}, \ldots, f_{p+1}$. Для этого предположим, что буква h занимает в ряду $a, b, c, \ldots, f$ место нумера j, считая слева; иными словами, пусть буква h стоит вверху j-го столбца определителя M. Помножим равен

ства (22) соответственно на $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{kj}$ и сложим. Мы получаем равенство:

$$a_p a_{1j} + b_p a_{2j} + c_p a_{3j} + \ldots + f_p a_{kj} =$$

$$= a \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{1\nu}^{(p)} a_{\nu j} + b \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{2\nu}^{(p)} a_{\nu j} + c \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{3\nu}^{(p)} a_{\nu j} + \ldots + f \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{k\nu}^{(p)} a_{\nu j} \quad (53)$$

С другой стороны, возьмем матрицу A^{p+1}; ее элементы суть $a_{ij}^{(p+1)}$. Рассматривая эту матрицу как произведение двух матриц A^p и A:

$$A^{p+1} = A^p \times A,$$

мы видим, что элементы a_{ij}^p должны составляться по известному правилу перемножения двух матриц («строки левого множителя на столбцы правого»). Это замечание нам дает немедленно равенства

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{i\nu}^{(p)} a_{rj} \quad (54)$$

каковы бы ни были числа i и j.

Приняв во внимание формулы (54), мы видим, что правая часть равенства (53) перепишется в виде

$$aa_{1j}^{(p+1)} + ba_{2j}^{(p+1)} + ca_{3j}^{(p+s)} + \ldots + fa_{kj}^{(p+1)}, \quad (55)$$

что является просто равным h_{p+1}, как показывает j-ая строка равенств (22), в которых надо только заменить p на $p+1$.

Таким образом, равенство (53) может быть написано в виде

$$h_{p+1} = a_{1j} a_p + a_{2j} b_p + a_{3j} c_p + \ldots + a_{kj} f_p. \quad (56)$$

Заставив в равенстве (56) j последовательно пробежать все числа

$$1, 2, 3, \ldots, k,$$

мы окончательно получаем систему равенств:

$$\left.\begin{aligned} a_{p+1} &= a_{11}\,a_p + a_{21}\,b_p + a_{31}\,c_p + \ldots + a_{k1}\,f_p \\ b_{p+1} &= a_{12}\,a_p + a_{22}\,b_p + a_{32}\,c_p + \ldots + a_{k2}\,f_p \\ c_{p+1} &= a_{13}\,a_p + a_{23}\,b_p + a_{33}\,c_p + \ldots + a_{k3}\,f_p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{p+1} &= a_{1k}\,a_p + a_{2k}\,b_p + a_{3k}\,c_p + \ldots + a_{kk}\,f_p \end{aligned}\right\}. \tag{57}$$

Найденные формулы (57) можно словесно выразить весьма просто сказав, что $p+1$-ая строка определителя M (I) получается проделывая над элементами p-ой строки этого определителя линейную подстановку A', где матрица A' есть перевернутая матрица A, т. е. такая, которая выводится из матрицы A заменой строк на столбцы и обратно:

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{k3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{kk} \end{matrix} \right\|. \tag{58}$$

Установив это, возвратимся к тождеству (II) акад. А. Н. Крылова. Для доказательства этого тождества нам теперь остается только перемножить оба определителя, стоящие в его левой части, по правилу «строки левого на столбцы правого». Написав полученное произведение в виде определителя

$$\left| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \ldots & \alpha_{kk} \end{matrix} \right|, \tag{59}$$

согласно указанному правилу мы будем иметь для его элементов α_{ij} равенства:

$$\alpha_{ij} = a_{i-1} a_{1j} + b_{i-1} a_{2j} + c_{i-1} a_{3j} + \ldots + f_{i-1} a_{kj} - \lambda h_{i-1}. \qquad (60)$$

Напомним, что содержащиеся в этих равенствах количества

$$h = h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$$

суть элементы j-го столбца определителя M.

В силу равенств (57) равенство (60) принимает вид

$$\alpha_{ij} = h_i - \lambda h_{i-1} \qquad (61)$$

что показывает, что определитель (59) напишется в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda a & b_1 - \lambda b & c_1 - \lambda c & \ldots f_1 - \lambda f \\ a_2 - \lambda a_1 & b_2 - \lambda b_1 & c_2 - \lambda c_1 & \ldots f_2 - \lambda f_1 \\ a_3 - \lambda a_2 & b_3 - \lambda b_2 & c_3 - \lambda c_2 & \ldots f_3 - \lambda f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k - \lambda a_{k-1} & b_k - \lambda b_{k-1} & c_k - \lambda c_{k-1} & \ldots f_k - \lambda f_{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (62)$$

Теперь легко преобразовать определитель (62). С этой целью повысим его порядок на одну единицу и напишем его в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & \ldots f \\ 0 & a_1 - \lambda a & b_1 - \lambda b & c_1 - \lambda c & \ldots f_1 - \lambda f \\ 0 & a_2 - \lambda a_1 & b_2 - \lambda b_1 & c_2 - \lambda c_1 & \ldots f_2 - \lambda f_1 \\ 0 & a_3 - \lambda a_2 & b_3 - \lambda b_2 & c_3 - \lambda c_2 & \ldots f_3 - \lambda f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_k - \lambda a_{k-1} & b_k - \lambda b_{k-1} & c_k - \lambda c_{k-1} & \ldots f_k - \lambda f_{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (63)$$

Ясно, что прибавление в определителе (63) ко второй строке первой, умноженной на λ, преобразует вторую строку в $\lambda, a_1, b_1, c_1, \ldots, f_1$. Аналогично, прибавление к третьей строке определителя (63) преобразованной второй, умноженной на λ, преобразует третью строку в $\lambda^2, a_2, b_2, c_2, \ldots, f_2$, и так далее. Повторив этот прием k раз, мы видим, что определитель (63) напишется в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & \ldots & f \\ \lambda & a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ \lambda^2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \lambda^3 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^k & a_k & b_k & c_k & \ldots & f_k \end{vmatrix}, \qquad (64)$$

а это и есть правая часть тождества (II) акад. А. Н. Крылова, что и требовалось доказать.

Таким образом, вспоминая все установленное, мы приходим к предложению:

Теорема I. *Существует такой множитель M, являющийся однородной функцией k-ой степени от произвольных параметров $a, b, c, \ldots, f$ и однородной функцией степени $\frac{(k-1)k}{2}$ от элементов a_{ij} матрицы A, который, будучи умножен на левую часть векового уравнения обычного вида, заставляет неизвестную λ, расположенную по диагонали, переместиться в первый столбец.*

В дальнейшем мы будем называть этот множитель M перемещающим множителем акад. А. Н. Крылова и, когда его рассматривают как функцию параметров $a, b, c, \ldots, f$, т. е. как $M(a, b, c, \ldots f)$, будем его называть формой акад. А. Н. Крылова.

Из предшествовавшего вытекает необходимость разрешения следующих трех проблем:

Проблема I. *Предполагая все элементы a_{ij} матрицы A вещественными, узнать, когда форма M есть знакопостоянная.*

Проблема II. *Узнать, имеются ли численные значения параметров*

$$a, b, c, \ldots, f,$$

делающие форму M *отличною от нуля, и отыскать их.*

Проблема III. *Узнать, когда форма* M *тождественно равна нулю, каковы бы ни были численные величины параметров* $a, b, c, \ldots, f$.

Ясно, что случаи, рассматриваемые проблемами I и III противоположны друг другу, так как в одном случае преобразование векового уравнения методом акад. А. Н. Крылова имеет место при любых вещественных величинах параметров $a, b, c, \ldots, f$, а в другом случае, наоборот, рассматриваемое преобразование — без внесения в него изменений, указанных акад. А. Н. Крыловым в конце его работы — отпадает. Случай проблемы II есть, в некотором роде, промежуточный.

Прежде чем идти дальше, рассмотрим для наглядности вековое уравнение для $k = 2$. Имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Перемещающий множитель M в этом случае есть

$$M = a^2 a_{12} + ab(a_{22} - a_{11}) - b^2 a_{21}.$$

Дискриминант D квадратичной формы M есть

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} a_{21}.$$

Поэтому, форма M есть знакопостоянная, если

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} a_{21} < 0$$

и уничтожается тождественно тогда и только тогда, когда

$$a_{11} = a_{22}$$

и одновременно:

$$a_{12} = a_{21} = 0.$$

Таким образом, одной кратности корней λ является не достаточным для тождества формы M нулю.

Укажем еще следующую полезную геометрическую интерпретацию общего случая.

Будем рассматривать параметры $a, b, c, \ldots, f$ как координаты некоторой точки P Евклидова пространства k измерений. Аналогично, пусть количества $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ являются координатами некоторой точки P_p в этом же пространстве. Имеем, следовательно, конфигурацию k точек

$$P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_p,\ \ldots,\ P_{k-1} \tag{65}$$

координаты которых составляют перемещающий множитель M, так как координаты точки P_p образуют $p+1$-ую строку определителя M (I).

Выше мы видели, что переход от любой p-ой строки $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ определителя M к следующей его строке $a_{p+1}, b_{p+1}, c_{p+1}, \ldots, f_{p+1}$ осуществляется при помощи одной и той же самой линейной подстановки A

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{k1}x_k \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots + a_{k2}x_k \\ y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{k3}x_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + \ldots + a_{kk}x_k \end{array}\right\}, \tag{66}$$

матрица которой A' (58) есть перевернутая матрица A (т. е. выведенная из A заменой строк на столбцы и обратно).

Из сказанного следует, что точка P_{p+1} есть преобразование точки P_p при помощи линейной подстановки A' (66), что можно символически изобразить в виде равенства

$$P_{p+1} = A'(P_p) \tag{67}$$

и, значит, самая точка P_p есть не что иное, как p-кратное преобразование исходной точки P этой подстановкой A' (66):

$$P_p = A'^p(P). \tag{68}$$

Установив это, присоединим к точкам (65) начало координат 0; мы получим совокупность $k+1$ точек

$$0,\ P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_{k-1}. \tag{69}$$

В общем случае, совокупность $n+1$ точек не умещается в Евклидовом пространстве числа измерений меньше n. С этой точки зрения равенство нулю перемещающего множителя M, $M=0$, выражает тот геометрический факт, что совокупность $k+1$ точек (65) умещается в некотором Евклидовом многообразии (E) измерений $k-1$, проходящем чрез начало 0 координат

$$e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 + \ldots + e_k x_k = 0. \tag{E}$$

где не все коэффициенты e_i суть нули.

Иначе говоря, перемещающий множитель M обращается в нуль тогда и только тогда, когда глаз наблюдателя, находящийся в начале координат 0, видит точки $P, P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ умещенными в Евклидовом многообразии $k-1$ измерений.

Тождественное обращение в нуль перемещающего множителя M обозначает, что конфигурация точек (65) всегда умещается в указанном Евклидовом многообразии (E), какова бы ни была исходная точка P. Понятно, что многообразие (E) должно поворачиваться при движении точки P.

Иллюстрируем сказанное на примере. Пусть линейная подстановка A' (и, значит, сама матрица A) есть циклическая с периодом $<k$. В этом случае, среди точек $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$ обязательно будут совпавшие, какова бы ни была исходная точка P, и, значит, перемещающий множитель M тождественно равен нулю.

Так, для Евклидова пространства трех измерений матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} \cos 2\alpha, & 2\cos\alpha\cos\beta, & 2\cos\alpha\cos\gamma \\ 2\cos\alpha\cos\beta, & \cos 2\beta, & 2\cos\beta\cos\gamma \\ 2\cos\alpha\cos\gamma, & 2\cos\beta\cos\gamma, & \cos 2\gamma \end{matrix} \right\| \tag{70}$$

выражает вращение тела около оси, проходящей чрез начало координат 0 и составляющей с осями OX, OY, OZ соответственно углы α, β, γ, причем поворот тела происходит на $180°$.

Отсюда ясно, что из трех точек P, P_1, P_2, точка P_2 всегда тождественна точке P. Поэтому, перемещающий множитель M, составленный для матрицы (70), тождественно равен нулю, каковы бы ни были углы α, β, γ.

Заметим, что определитель A матрицы (70) всегда равен $+1$, так как здесь имеем дело с конгруэнтным преобразованием пространства самого в себя.

Возратимся теперь к рассмотрению общего случая векового уравнения (1). С алгебраической точки зрения уравнение это возникает при рассмотрении линейной подстановки A

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kk}x_k \end{aligned}\right\}. \tag{A}$$

когда мы потребуем, чтобы преобразованные переменные $y_1, y_2, y_3, \ldots y_k$ и первопачальные переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ были связаны дополнительным соотношением

$$y_1 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda x_2,\ y_3 = \lambda x_3,\ \ldots,\ y_k = \lambda x_k. \tag{71}$$

Будем обозначать для удобства указанную подстановку A и ее матрицу тою же самою буквою A. Определитель же этой подстановки будем теперь писать в виде $|A|$. Таким образом

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}. \tag{72}$$

Заметим здесь же, что мы отнюдь не предполагаем ничего относительно определителя (72): таким образом, определитель $|A|$ может оказаться и нулем.

Введем теперь, на ряду с линейной подстановкой A, новую линейную подстановку B, характеризуемую матрицей

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{73}$$

причем мы теперь уже предположим, что определитель $|B|$ этой матрицы

$$|B| = \left| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kk} \end{matrix} \right| \tag{74}$$

строго отличен от нуля, $|B| \neq 0$.

В этом предположении введем две новые совокупности переменных:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k$$

и

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_k,$$

преобразующихся соответственно в совокупности прежних переменных

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$$

и

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$$

при помощи одной и той же подстановки B. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3 + \ldots + b_{1k}\xi_k \\ x_2 = b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3 + \ldots + b_{2k}\xi_k \\ x_3 = b_{31}\xi_1 + b_{32}\xi_2 + b_{33}\xi_3 + \ldots + b_{3k}\xi_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = b_{k1}\xi_1 + b_{k2}\xi_2 + b_{k3}\xi_3 + \ldots + b_{kk}\xi_k \end{array}\right\} \quad (75)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3 + \ldots + b_{1k}\eta_k \\ y_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3 + \ldots + b_{2k}\eta_k \\ y_3 = b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3 + \ldots + b_{3k}\eta_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = b_{k1}\eta_1 + b_{k2}\eta_2 + b_{k3}\eta_3 + \ldots + b_{kk}\eta_k \end{array}\right\}. \quad (76)$$

Написав подстановку (A) символически в виде

$$y = A(x) \quad (77)$$

мы видим, что равенства (75) можно написать так

$$x = B(\xi) \quad (78)$$

и, аналогично, равенства (76) изобразятся в виде

$$y = B(\eta). \quad (79)$$

В силу наличия линейной зависимости (A) между переменными

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$$

и

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k,$$

равенства (75) и (76) должны устанавливать некоторую прямую линейную зависимость между самими новыми переменными $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_k$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$. Известно, что эта прямая зависимость указанных пере-

менных, очевидно получающаяся исключением $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ и $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ из равенств (A), (75) и (76), символически выражается весьма просто в виде равенства

$$\eta = B^{-1} AB(\xi) \tag{80}$$

получающегося исключением букв x и y из символических равенств (77), (78) и (79).

Здесь B^{-1} обозначает линейную подстановку, обратную подстановке B. Так как определитель $|B|$ отличен от нуля, эта обратная подстановка B^{-1} существует.

Равенство (80) указывает, что переменные $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_k$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$ связаны между собой некоторой вполне определенной линейной подстановкой A^*, которая определяется символическим равенством

$$A^* = B^{-1} AB \tag{81}$$

и которую мы напишем в явном виде

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = a_{11}^* \xi_1 + a_{12}^* \xi_2 + a_{13}^* \xi_3 + \ldots + a_{1k}^* \xi_k \\ \eta_2 = a_{21}^* \xi_1 + a_{22}^* \xi_2 + a_{23}^* \xi_3 + \ldots + a_{2k}^* \xi_k \\ \eta_3 = a_{31}^* \xi_1 + a_{32}^* \xi_2 + a_{33}^* \xi_3 + \ldots + a_{3k}^* \xi_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k = a_{k1}^* \xi_1 + a_{k2}^* \xi_2 + a_{k3}^* \xi_3 + \ldots + a_{kk}^* \xi_k \end{array}\right\}. \tag{A*}$$

Из равенства (81) следует, что подстановка A^* есть не что иное как «преобразование подстановки A помощью подстановки B», согласно терминологии теории линейных подстановок.

Отсюда же следует, что определитель $|A^*|$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \ldots & a_{1k}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & \ldots & a_{2k}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* & \ldots & a_{3k}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}^* & a_{k2}^* & a_{k3}^* & \ldots & a_{kk}^* \end{vmatrix} \tag{81}$$

подстановки A^* в точности равен определителю $|A|$ (72). В самом деле, из равенства (81) заключаем

$$|A^*| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = \frac{1}{|B|} \cdot |A| \cdot |B| = |A|,$$

так как известно, что определитель подстановки B^{-1}, обратной подстановке B, равен отношению $1:|B|$, причем определитель $|B|$ отличен от нуля.

Обозначим чрез $\Delta^*(\lambda)$ левую часть векового уравнения, соответствующего линейной подстановке A^*

$$\Delta^*(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}^* - \lambda & a_{12}^* & a_{13}^* & \ldots a_{1k}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* - \lambda & a_{23}^* & \ldots a_{2k}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* - \lambda & \ldots a_{3k}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^* & a_{k2}^* & a_{k3}^* & \ldots a_{kk}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (82)$$

и, соответственно, обозначим чрез M^* перемещающий множитель акад. А. Н. Крылова для векового уравнения (82). Ближайшею целью последующих рассуждений является вычисление перемещающего множителя M^*.

Прежде всего установим, что имеем тождество

$$\Delta(\lambda) = \Delta^*(\lambda) \qquad (83)$$

при любом значении переменной λ.

С этой целью предположим сначала, что вековое уравнение (1) не имеет кратных корней. Пусть λ' есть какой-нибудь его корень. В этом предположении линейная подстановка (A) совместна с дополнительным соотношением (71), в котором нужно λ заменить на λ':

$$y_1 = \lambda' x_1,\ y_2 = \lambda' x_2,\ y_3 = \lambda' x_3,\ \ldots,\ y_k = \lambda' x_k. \qquad (84)$$

Ясно, что дополнительное соотношение (84), будучи рассмотрено совместно с равенствами (75) и (76), дает соотношение

$$\eta_1 = \lambda' \xi_1,\ \eta_2 = \lambda' \xi_2,\ \eta_3 = \lambda' \xi_3,\ \ldots,\ \eta_k = \lambda' \xi_k, \qquad (85)$$

которое можно рассматривать, как дополнительное соотношение к линейной подстановке (A^*), связывающей переменные $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_k$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_k$. Отсюда заключаем, что всякий корень λ' векового уравнения (1) является вместе с тем корнем и векового уравнения (82).

Но мы предположили, что все корни многочлена $\Delta(\lambda)$ различны. Так как оба многочлена, $\Delta(\lambda)$ и $\Delta^*(\lambda)$, имеют одинаковую степень и старшие коэффициенты у обоих равны $+1$, и так как многочлен $\Delta^*(\lambda)$ должен иметь те же самые корни, что и многочлен $\Delta(\lambda)$, то отсюда заключаем, что тождество (83) справедливо в случае отсутствия кратных корней у векового уравнения (1).

Применив теперь к этому случаю тождества (83) то рассуждение «по непрерывности», которое было нами сделано выше, мы заключаем, что тождество (83) справедливо всегда, каково бы ни было вековое уравнение (1).

Из тождества (83), наконец, заключаем, что вековое уравнение (82) имеет те же самые корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$, что и данное вековое уравнение (1) и каждый с тою же самою кратностью.

Установив это, мы переходим к вычислению перемещающего множителя M^* для векового уравнения (82).

Прежде всего имеем

$$M^* = \begin{vmatrix} a^* & b^* & c^* & \ldots & f^* \\ a_1^* & b_1^* & c_1^* & \ldots & f_1^* \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & f_2^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1}^* & b_{k-1}^* & c_{k-1}^* & \ldots & f_{k-1}^* \end{vmatrix}, \qquad (86)$$

где параметры $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ суть новые произвольные параметры, с помощью которых составляется перемещающий множитель M^*, и где строка $a_p^*, b_p^*, c_p^*, \ldots, f_p^*$ получается согласно найденному выше

правилу: количества a_p^*, b_p^*, c_p^*, ..., f_p^* суть преобразование параметров a^*, b^*, c^*, ..., f^* помощью p-ой степени линейной подстановки $(A^*)'$

$$(A^*)' = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* & \dots & a_{k1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* & \dots & a_{k2}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* & \dots & a_{k3}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k}^* & a_{2k}^* & a_{3k}^* & \dots & a_{kk}^* \end{vmatrix}, \tag{87}$$

матрица которой есть перевернутая матрица A^*.

Но имеем

$$A^* = B^{-1} AB. \tag{81}$$

Следовательно, обозначая знаком $'$ действие перевертывания матриц, мы, согласно известным предложениям теории матриц, находим

$$(A^*)' = B' A' (B')^{-1} \tag{88}$$

откуда

$$[(A^*)']^p = [B' A' (B')^{-1}] \cdot [B' A' (B')^{-1}] \cdot \ \cdots \ \cdot [B' A' (B')^{-1}] =$$
$$= B' (A')^p (B')^{-1}$$

так число квадратных скобок есть p. Написав полученное равенство в виде

$$[(A^*)']^p = (B'^{-1})^{-1} (A')^p (B'^{-1}) \tag{89}$$

мы заключаем, что переход от первой строки определителя M^* (86) к его p-ой строке осуществляется линейной подстановкой являющейся преобразованием соответствующего перехода у определителя M (I) помощью подстановки $(B')^{-1}$.

Это важное обстоятельство позволяет немедленно установить прямую связь p-ых строк определителей M и M^*:

$$a_p,\ b_p,\ c_p,\ \dots,\ f_p$$

и

$$a_p^*,\ b_p^*,\ c_p^*,\ \dots,\ f_p^*.$$

С этой целью удобно прибегнуть к символическим обозначениям. Мы видели, что подстановка

$$y = A'^{p}(x) \tag{90}$$

осуществляет переход от первой строки определителя $M(\mathrm{I})$ к его p-ой строке, и что аналогичный переход у определителя M^* (86) осуществляется подстановкой

$$y = (B'^{-1})^{-1} A'^{p} B'^{-1}(x). \tag{91}$$

До сих пор новые параметры $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ оставались совершенно произвольными и независящими от прежних параметров $a, b, c, \ldots, f$. Свяжем теперь обе совокупности этих параметров и потребуем, чтобы новые параметры $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ являлись бы преобразованием прежних параметров $a, b, c, \ldots, f$ при помощи подстановки B'. Иначе говоря, потребуем наличия следующих соотношений

$$\left.\begin{aligned}
a^* &= b_{11} a + b_{21} b + b_{31} c + \ldots + b_{k1} f \\
b^* &= b_{12} a + b_{22} b + b_{32} c + \ldots + b_{k2} f \\
c^* &= b_{13} a + b_{23} b + b_{33} c + \ldots + b_{k3} f \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^* &= b_{1k} a + b_{2k} b + b_{3k} c + \ldots + b_{kk} f
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

В виду того, что определитель $|B|$ отличен от нуля, система уравнений (92) дает не только выражение новых параметров $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$ чрез старые $a, b, c, \ldots, f$, но и обратно. Поэтому, несмотря на установленную связь (92), новые параметры остаются по своим численным величинам столь же произвольными, как и прежние, так как надлежащим подбором численных величин старых параметров можно сообщить новым параметрам любые заданные численные величины.

Установив это, заменим в символической формуле (91) букву x чрез систему новых параметров $a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*$. Согласно предшествовавшему, мы в этой формуле на месте буквы y должны получить количества

$$a_p^*, b_p^*, c_p^*, \ldots, f_p^*.$$

Но, с другой стороны, выражение $B'^{-1}(x)$ должно дать, согласно формулам (92), систему старых параметров $a, b, c, \ldots, f$ и, значит, выражение $A'^p\ B'^{-1}(x)$ должно дать p-ую строку определителя $M(\mathrm{I})$ в силу формулы (90). И так как $(B'^{-1})^{-1} = B'$, то отсюда мы заключаем о наличии следующего важного правила: чтобы иметь p-ую строку определителя M^* надо взять p-ую строку определителя M и преобразовать ее подстановкой B'.

В этом правиле p обозначает любое из чисел $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$ так как взаимоотношение начальных строк определителей M^* и M следует этому же самому правилу в силу формул (92), определяющих новые параметры чрез старые.

Только что найденное правило можно записать системою равенств:

$$\left.\begin{array}{l}
a_p^* = b_{11}a_p + b_{21}b_p + b_{31}c_p + \ldots + b_{k1}f_p \\
b_p^* = b_{12}a_p + b_{22}b_p + b_{32}c_p + \ldots + b_{k2}f_p \\
c_p^* = b_{13}a_p + b_{23}b_p + b_{33}c_p + \ldots + b_{k3}f_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_p^* = b_{1k}a_p + b_{2k}b_p + b_{3k}c_p + \ldots + b_{kk}f_p
\end{array}\right\}, \tag{93}$$

где p пробегает все числа $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$ и где мы полагаем

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = c, \ldots, f_0 = f$$

и, соответственно,

$$a_0^* = a^*,\ b_0^* = b^*,\ c_0^* = c^*, \ldots, f_0^* = f^*.$$

Полученные формулы (93) доказывают следующее важное тождество

$$\begin{Vmatrix}
a & b & c & \ldots & f \\
a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots & f_{k-1}
\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1k} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2k} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \ldots & b_{kk}
\end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}
a^* & b^* & c^* & \ldots & f^* \\
a_1^* & b_1^* & c_1^* & \ldots & f_1^* \\
a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & f_2^* \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k-1}^* & b_{k-1}^* & c_{k-1}^* & \ldots & f_{k-1}^*
\end{Vmatrix}. \tag{III}$$

Действительно, составляя произведение двух матриц, содержащихся в левой части тождества (III), по обычному правилу «строки левой на столбцы правой», мы очевидно получаем, в силу формул (93), элементы матрицы, стоящей в правой части тождества (III).

Таким образом, тождество (III) доказано.

В тождестве (III) матрицы могут быть заменены, очевидно, определителями. Это замечание приводит нас к равенству

$$M \cdot |B| = M^* \tag{94}$$

показывающему, что перемещающий множитель M^* преобразованного векового уравнения (82) помощью подстановки B равен перемещающему множителю M прежнего векового уравнения (1), умноженному на определитель преобразующей подстановки B.

Так как определитель $|B|$ преобразующей подстановки B существенно отличен от нуля, то отсюда заключаем, что перемещающий множитель M^* обращается в нуль тогда и только тогда, когда перемещающий множитель M равен нулю.

Установленное важно вот в каком отношении: без изменения природы перемещающего множителя M в отношении равенства его нулю или отличия его от нуля, мы можем преобразовать данную матрицу A помощью любой линейной подстановки B, лишь бы ее определитель $|B|$ был отличен от нуля.

Естественно, следовательно, искать таких преобразований матрицы A, при которых она имеет возможно более простой вид.

Приложим найденное к исследованию общего случая перемещающего множителя M акад. А. Н. Крылова.

Известно из теории матриц, что любая матрица A может быть всегда приведена, помощью надлежаще подобранного линейного преобразования B, к виду

$$\begin{Vmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & & & & A_m \end{Vmatrix} \tag{95}$$

где A_i обозначает матрицу e_i-го порядка

$$A_i = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{Vmatrix} \tag{96}$$

и где

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_m = k.$$

Мы видим, что в этом приведенном виде матрица A имеет все элементы, находящиеся вне малых квадратных матриц A_i, равными нулю, и что в самих матрицах A_i все элементы, находящиеся вне главной диагонали и вне прилегающей сверху к ней параллели, также равны нулю. На самой же главной диагонали матрицы A_i все элементы равны количеству λ_i, и на указанной параллели все элементы равны 1.

Так как все элементы матрицы A, расположенные ниже главной диагонали, суть нули, то отсюда следует, что количества

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_m \tag{97}$$

суть корни векового уравнения (1). Нужно тотчас же отметить, что между корнями (97) могут оказаться корни, равные между собою, и что, следовательно, отнюдь не предполагается, что в строке (97) выписаны различные попарно количества.

Известно, что указанный сейчас приведенный вид (95) матрицы A' связан с отысканием так называемых «элементарных делителей» (Elementarteiler) Вейерштрасса квадратной матрицы, составляющей левую часть первоначально данного векового уравнения (1)

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots a_{kk}-\lambda \end{Vmatrix}. \tag{97}$$

В теории матриц показывается, каким образом отыскиваются эти элементарные делители у произвольно-написанной матрицы (97), независимо от каких-либо предположений относительно ее элементов a_{ij}. Заметим, что это отыскание элементарных делителей у apriori данной матрицы (97) производится вполне планомерным образом, и что элементарные делители суть инварианты матрицы A, не могущие измениться ни при каком преобразовании данной матрицы A помощью линейных подстановок B, определитель которых $|B|$ отличен от нуля: все преобразованные матрицы $B^{-1}AB$ имеют те же самые элементарные делители. Обратное является также верным: две матрицы, имеющие различные элементарные делители, не могут быть преобразованы одна в другую указанным образом. Таким образом, отождествление элементарных делителей двух каких-либо матриц есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы одна матрица была преобразованием другой.

В частности, при приведенном виде (95), матрица A имеет своими элементарными делителями

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ (\lambda-\lambda_3)^{e_3},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_m)^{e_m}. \tag{98}$$

Следовательно, приведенный вид (95) произвольно-данной матрицы A вполне определяется элементарными делителями (98) матрицы A и сам, в свою очередь, их определяет.

Важно для последующего, наконец, отметить, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы количества

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_m$$

были различны, является чтобы элементарные делители Вейерштрасса матрицы A были взаимно-простые.

Напомнив и указав это, предположим, что матрица A уже приведена к виду (95) и составим, в этом предположении, перемещающий множитель M.

С этой целью составим сначала p-ую степень перевернутой матрицы A'. Имеем очевидно:

$$A_i'^p = \left\| \begin{array}{cccc} A_1'^p & & & \\ & A_2'^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m'^p \end{array} \right\|, \tag{99}$$

где $A_i'^p$ обозначает p-ую степень перевернутой матрицы A_i'.

Приняв во внимание строение матрицы A_i, дающееся формулой (96) и ее порядок e_i, легко заключить, что матрица $A_i'^p$ имеет вид

$$A_i'^p = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_i^p & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_p^1 \lambda_i^{p-1} & \lambda_i^p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_p^2 \lambda_i^{p-2} & C_p^1 \lambda_i^{p-1} & \lambda_i^p & 0 & \ldots & 0 \\ C_p^3 \lambda_i^{p-3} & C_p^2 \lambda_i^{p-2} & C_p^1 \lambda_i^{p-1} & \lambda_i^p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_p^{e_i-1} \lambda_i^{p-e_i+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_i^p \end{array} \right\|, \tag{100}$$

где множитель C_p^s обозначает число сочетаний из p предметов по s.

Строение матрицы $A_i'^p$ весьма простое: ее строки суть не что иное, как члены бинома Ньютона $(\lambda_i + 1)^p$, написанные влево от главной диагонали по направлению к первому столбцу.

Вследствие формул (99) и (100) самый перемещающий множитель M имеет вид

$$M = \left\| M_1 \; \vdots \; M_2 \; \vdots \; M_3 \; \vdots \; \ldots \; \vdots \; M_m \right\|, \tag{101}$$

где M_i обозначает матрицу вида

$$M_i = \left\| \begin{matrix} h & \dots g \\ h_1 & \dots g_1 \\ h_2 & \dots g_2 \\ \dots & \dots \\ h_p & \dots g_p \\ \dots & \dots \\ h_{k-1} & \dots g_{k-1} \end{matrix} \right\|, \tag{102}$$

Здесь p-ая строка матрицы $h_p, \dots, g_p$ есть, согласно правилам (57) и (68) составления перемещающего множителя M, линейная комбинация столбцев матрицы $A_i'^p$ при помощи параметров $h, \dots, g$ как коэффициентов этой линейной комбинации. Параметры же $h, \dots, g$ суть те из параметров $a, b, c, \dots, f$, которые находятся в столбцах, образующих матрицу A_i.

Из сказанного мы заключаем, что первый столбец всякой матрицы M_i, будучи выписанным слева направо, имеет вид

$$h, \; h\lambda_i, \; h\lambda_i^2, \; h\lambda_i^3, \; \dots, \; h\lambda_i^{k-1} \tag{103}$$

Поэтому, если собрать вместе одни только первые столбцы всех матриц M_i $(i = 1, 2, 3, \dots, m)$, входящих в состав перемещающего множителя M, и выписать их один за другим, вынеся у каждого из них общий его элементам множитель-параметр, то получится матрица

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_m^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \dots \lambda_m^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \dots \lambda_m^{k-1} \end{matrix} \right\|. \tag{104}$$

Из вида этой матрицы (104) заключаем, что, если среди количеств

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$$

имеются равные, то тогда два столбца определителя M (101) окажутся равными, по выносе у каждого из них общего множителя. Поэтому определитель M в этом случае равен нулю, каковы бы ни были величины параметров $a, b, c, \ldots, f$.

Таким образом, перемещающий множитель M тождественно равен нулю, когда среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ имеются равные.

Покажем теперь, что если числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ все различны, перемещающий множитель M при надлежащем выборе численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, отличен от нуля.

Выбор численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, который мы имеем ввиду, есть следующий: мы полагаем равными 1 все те параметры, которые возглавляют первые столбцы каждой из матриц

$$M_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

и полагаем остальные параметры равными нулю.

При таком выборе численных величин параметров, перемещающий множитель M всё еще имеет вид (101), но в этом случае матрица M_i принимает следующий более простой вид:

$$M_i = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_i^{k-1} & C_{k-1}^1 \lambda_i^{k-2} & C_{k-1}^2 \lambda_i^{k-3} & C_{k-1}^3 \lambda_i^{k-4} & \ldots \end{matrix} \right\| \qquad (105)$$

т. е. p-ая строка этой матрицы составлена из последовательных членов бинома Ньютона $(\lambda_i + 1)^p$, написанных в порядке убывания степеней количеств λ_i. Число столбцев матрицы M_i есть в точности e_i.

Покажем, что определитель M (101), составленный из таких матриц M_i ($i=1, 2, 3, \ldots, m$), необходимо отличен от нуля, если среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ нет равных.

Это предложение представляет расширение известной теоремы Вандермонда, в которую и переходит при $e_1=e_2=e_3=\ldots=e_m=1$, и было бы интересно иметь чисто алгебраическое доказательство его, а также и самую величину определителя M: из рассмотрений a priori явствует, что величина M равна произведению целых и положительных степеней разностей $\lambda_i-\lambda_j$. Ради ускорения дела, мы не будем задерживаться на этом и дадим сейчас доказательство, основанное на рассмотрении бесконечно малых и могущее быть изложенным кратко.

Заметим прежде всего, что система k функций независимой переменной t

$$\begin{gathered}[\lambda_1^{k-1}t^{k-1}, \ldots], \ldots, \\ \left[\lambda_i^{k-1}t^{k-1},\ C^1_{k-1}\lambda_i^{k-2}t^{k-2}, \ldots, C^{e_i-1}_{k-1}\lambda_i^{k-e_i}t^{k-e_i}\right], \ldots, \\ \left[\ldots, C^{e_m-1}_{k-1}\lambda_m^{k-e_m}t^{k-e_m}\right]\end{gathered} \tag{106}$$

получающаяся из нижней строки определителя M (101) заменой всякого λ_i на $\lambda_i t$, есть система линейно-независимых функций.

Поэтому, определитель Вронского, составленный для этой системы функций, не может быть тождественным нулю при всяком t.

Но этот определитель Вронского, как усматривают немедленно, до численного множителя, отличающегося от нуля, совпадает с определителем M (101), в котором лишь всякое λ_i во всех элементах этого определителя заменено чрез $\lambda_i t$, и который, после такой замены, мы обозначим теперь чрез $M(t)$.

Заметив это, умножим ν-ый столбец всякой матрицы $M_i(t)$ на $t^{\nu-1}$. Ясно, что весь определитель $M(t)$ вследствие этого окажется умноженным на некоторую целую положительную степень q независимой переменной t, равную

$$\sum_{i=1}^{i=m}\frac{(e_i-1)\,e_i}{2}=q.$$

С другой стороны, после такого умножения определитель $M(t)$ во всех элементах своей μ-ой строчки, $\mu=1, 2, 3, \ldots, k$, будет содержать t в одной и той же самой степени, в точности равной $\mu-1$. Следовательно,

после такого умножения, он становится просто определителем M (101), умноженным на степень переменной t, равную $\frac{(k-1)k}{2} = r$.

Таким образом мы имеем

$$t^q M(t) = t^r \cdot M \qquad (107)$$

и так как определитель $M(t)$ не может быть тождественно равен нулю, то отсюда заключим, что определитель M (101) отличен от нуля:

$$M \neq 0.$$

Сопоставляя сказанное выше, мы видим, что определитель M (I) тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда среди чисел (97) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ имеются равные.

Вспоминая же указанные ранее свойства чисел (97), мы можем теперь окончательно формулировать предложение:

Теорема II. *Для того, чтобы перемещающий множитель M акад. А. Н. Крылова не был тождественно равен нулю, т. е. не уничтожался при всяких численных величинах параметров, необходимо и достаточно, чтобы все элементарные делители Вейерштрасса матрицы A были взаимно-простые.*

§ **6.** С теоретической точки зрения теорема II ищет дать ответ на поставленную выше проблему III отыскания критерия тождества нулю перемещающего множителя M (I). Мы видим, что этот критерий дан в иррациональной форме, так как предполагает знание элементарных делителей Вейерштрасса. Легко теперь освободиться от этого обстоятельства и придать найденному критерию рациональную форму, не требующую ничего, кроме выполнения первых четырех действий над элементами a_{ij} матрицы A.

Напомним предварительно некоторые положения теории матриц.

Согласно имеющейся терминологии, назовем «λ-матрицей» (λ-Matrix) всякую квадратную матрицу вида

$$U = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2k} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \ldots & u_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{k1} & u_{k2} & u_{k3} & \ldots & u_{kk} \end{matrix} \right\|, \qquad (108)$$

элементы u_{ij} которой суть многочлены независимой переменной λ с коэффициентами, являющимися известными постоянными.

Под рангом r этой λ-матрицы U мы понимаем наивысший порядок определителя этой матрицы, не уничтожающегося тождественно при изменении λ.

Назовем, далее, «элементарным преобразованием» λ-матрицы U всякое такое ее преобразование, которое распадается на конечное число следующих трех операций:

(1) перестановка двух рядов, горизонтальных или вертикальных;

(2) умножение какого-нибудь ряда на постоянную, отличную от нуля;

(3) прибавление к какому-нибудь ряду параллельного ряда, умноженного на многочлен переменной λ.

Обозначив определитель, соответствующий λ-матрице U чрез $|U|$, мы замечаем, что указанные три операции не изменяют корней уравнения

$$|U| = 0.$$

Две λ-матрицы называются «эквивалентными», если одна преобразуется в другую элементарным преобразованием.

Теперь основное предложение теории λ-матриц гласит: всякая λ-матрица U (108) элементарным преобразованием может быть приведена к «нормальному» виду

$$\left\| \begin{matrix} E_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3(\lambda) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_r(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{109}$$

где число r есть ранг λ-матрицы U (108) и где

$$E_1(\lambda),\ E_2(\lambda),\ E_3(\lambda),\ \dots,\ E_r(\lambda)$$

суть многочлены переменной λ, имеющие 1 старшим коэффициентом и такие, что каждый из них делит без остатка все следующие.

Эти многочлены $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, ..., $E_r(\lambda)$ вполне определяются данной λ-матрицей U (108). В теории матриц доказывается притом, что две λ-матрицы тогда и только тогда эквивалентны, когда многочлены $E_i(\lambda)$ одной тождественны этим многочленам другой. Ввиду этого свойства многочленов $E_i(\lambda)$ они называются «инвариантными множителями» λ-матрицы U.

Вот теперь связь инвариантных множителей и элементарных делителей Вейерштрасса. Напишем всякий многочлен $E_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, r$, в виде произведения

$$E_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_i'} (\lambda - \lambda_2)^{e_i''} (\lambda - \lambda_3)^{e_i'''} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{e_i^{(k)}} \qquad (110)$$

степеней линейных множителей $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$, ..., $\lambda - \lambda_k$; здесь числа e_i', e_i'', e_i''', ..., $e_i^{(k)}$ суть целые неотрицательные.

Согласно определению теории матриц, система множителей

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda-\lambda_1)^{e_1'},\ \ (\lambda-\lambda_1)^{e_2'},\ \ (\lambda-\lambda_1)^{e_3'},\ \ \ldots,\ (\lambda-\lambda_1)^{e_r'} \\ (\lambda-\lambda_2)^{e_1''},\ \ (\lambda-\lambda_2)^{e_2''},\ \ (\lambda-\lambda_2)^{e_3''},\ \ \ldots,\ (\lambda-\lambda_2)^{e_r''} \\ (\lambda-\lambda_3)^{e_1'''},\ \ (\lambda-\lambda_3)^{e_2'''},\ \ (\lambda-\lambda_3)^{e_3'''},\ \ \ldots,\ (\lambda-\lambda_3)^{e_r'''} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda-\lambda_k)^{e_1^{(k)}},\ \ (\lambda-\lambda_k)^{e_2^{(k)}},\ \ (\lambda-\lambda_k)^{e_3^{(k)}},\ \ \ldots,\ (\lambda-\lambda_k)^{e_r^{(k)}} \end{array}\right\}, \qquad (111)$$

несводящихся к постоянной, называется системою элементарных делителей λ-матрицы U (108).

В том же случае, когда данная λ-матрица U (108) есть левая часть векового уравнения (1), происходящего от матрицы A с постоянными элементами a_{ij}, система (111) называется просто системою элементарных делителей матрицы A. В этом случае (который мы только и рассматриваем здесь) числа λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_k суть, очевидно, все корни векового уравнения (1), и ранг $r = k$ потому что определитель векового урав-

нения $\Delta(\lambda)$ не уничтожается тождественно при изменении λ. Следовательно, в этом случае мы будем иметь равенство

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} E_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_3(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_k(\lambda) \end{vmatrix} \tag{112}$$

показывающее, что левая часть векового уравнения (1) есть произведение инвариантных множителей $E_i(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=E_1(\lambda)\cdot E_2(\lambda)\cdot E_3(\lambda)\dots E_k(\lambda). \tag{113}$$

Заметив это, возвратимся к системе (111). Так как многочлен $E_i(\lambda)$ всегда является делителем многочлена $E_{i+1}(\lambda)$, то отсюда проистекают неравенства

$$\left.\begin{array}{l} e_1' \leqslant e_2' \leqslant e_3' \leqslant \dots \leqslant e_r' \\ e_1'' \leqslant e_2'' \leqslant e_3'' \leqslant \dots \leqslant e_r'' \\ e_1''' \leqslant e_2''' \leqslant e_3''' \leqslant \dots \leqslant e_r''', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_1^{(k)} \leqslant e_2^{(k)} \leqslant e_3^{(k)} \leqslant \dots \leqslant e_r^{(k)} \end{array}\right\}. \tag{114}$$

Из этих неравенств видно, что элементарные делители (111) взаимно-просты тогда и только тогда, когда имеем равенства:

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = e_2' = e_3' = \dots = e_{r-1}' = 0 \\ e_1'' = e_2'' = e_3'' = \dots = e_{r-1}'' = 0 \\ e_1''' = e_2''' = e_3''' = \dots = e_{r-1}''' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_1^{(k)} = e_2^{(k)} = e_3^{(k)} = \dots = e_{r-1}^{(k)} = 0 \end{array}\right\}. \tag{115}$$

В этом случае все инвариантные множители $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_{r-1}(\lambda)$, кроме самого последнего $E_r(\lambda)$, суть просто постоянные числа (равные 1). Следовательно, в случае векового уравнения (1), в силу равенств (112) и (113), последний инвариантный множитель $E_k(\lambda)$ есть левая часть самого векового уравнения, написанная в уже составленном виде.

Вот теперь правило, вытекающее из предыдущих рассмотрений: имея λ-матрицу (1) нужно стараться привести её к нормальному виду (112), проделывая операции (1), (2) и (3). Если, при последовательном получении инвариантных множителей $E_i(\lambda)$, мы придем к непостоянному промежуточному множителю $E_i(\lambda)$, $i < k$, тогда перемещающая форма $M(a, b, c, \ldots, f)$ акад. А. Н. Крылова тождественно равна нулю. Если же этого не случится, тогда форма $M(a, b, c, \ldots, f)$ не может быть тождественной нулю.

Очевидно, что практического значения правило это не имеет никакого, так как применение его на деле столь же трудно, как и самое составление векового уравнения. Это правило лишь формулирует данный выше критерий тождества нулю перемещающего множителя M в рациональном виде, так как, в принципе, приведение λ-матрицы U в нормальную форму (109) совершается планомерно и не требует ничего, кроме первых четырех действий.

Поясним сказанное на примерах.

Начнем с рассмотрения примера акад. Л. И. Мандельштама:

$$\left\|\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{matrix}\right\|.$$

Переставляя 1-ую и 3-ю строки и затем вычитая из 2-го столбца 1-ый и из 3-го столбца 1-ый, умноженный на $2-\lambda$, имеем

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 2-\lambda & \lambda-1 & 1-(2-\lambda)^2 \end{matrix}\right\|.$$

Наконец, вычитая из 2-й строки 1-ю и из 3-ей строки 1-ю умноженную на $2-\lambda$, имеем

$$\left\| \begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda, & 1-(2-\lambda)^2 \end{array} \right\|.$$

Дальнейшие вычисления бесполезны, так как угловой элемент $1-\lambda$ матрицы 2-го порядка делит без остатка все элементы этой матрицы. Значит, имеем $E_2(\lambda)=\lambda-1$. Вследствие того, что $E_2(\lambda)$ фактически содержит λ, перемещающий множитель $M(a, b, c)$ тождественно равен нулю.

Возьмем пример акад. А. Н. Крылова:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 5-\lambda & 30 & -48 \\ 3 & 14-\lambda & -24 \\ 3 & 15 & -25-\lambda \end{array} \right\|.$$

Переставляя 1-ую и 3-ю строки и добиваясь в первом столбце сначала единиц делениями на 3, а потом и нулей соответствующими вычитаниями, мы получаем

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -\frac{25+\lambda}{3} \\ 1 & \frac{14+\lambda}{3} & -8 \\ 5-\lambda & 30 & -48 \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -\frac{25+\lambda}{3} \\ 0 & -\frac{\lambda+1}{3} & \frac{1+\lambda}{3} \\ 0 & 5+5\lambda, & -48+\frac{25+\lambda}{3}(5-\lambda) \end{array} \right\|.$$

Наконец, вычитая из 2-го столбца первый, умноженный на 5, и из 3-го столбца 1-ой, умноженный соответственным образом, мы получим

$$\left\| \begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\frac{\lambda+1}{3}, & \frac{1+\lambda}{3} \\ 0 & 5+5\lambda, & -48+\frac{25+\lambda}{3}(5-\lambda) \end{array} \right\|.$$

Дальнейшее вычисление бесполезно, так как угловой элемент $-\frac{\lambda+1}{3}$ матрицы 2-го порядка делит без остатка все элементы этой матрицы: в этом убеждаются из уничтожения их при $\lambda=-1$. Значит, имеем

$$E_2(\lambda)=\lambda+1,$$

и раз λ содержится фактически, то перемещающий множитель $M(a,b,c)$ тождественно равен нулю.

Пример иной природы являет матрица

$$\left\|\begin{matrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right\|.$$

Подобно обоим предыдущим примерам, вековое уравнение этого примера имеет один двойной корень ($\lambda_1=1$) и один простой ($\lambda_2=2$). Однако перемещающий множитель $M(a,b,c)$ уже не равен тождественно нулю.

Чтобы убедиться в этом, достаточно — следуя рассуждению академика А. Н. Крылова — написать соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q_1' &= 4q_1+q_2-q_3 \\ q_2' &= -6q_1-q_2+2q_3 \\ q_3' &= 2q_1+q_2+q_3 \end{aligned}$$

и положить

$$x=aq_1+bq_2+cq_3.$$

Дифференциальное уравнение для переменной x тогда напишется в виде

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x' & 4a-6b+2c & a-b+c & -a+2b+c \\ x'' & 8a-14b+4c & 2a-3b+2c & -3a+6b+c \\ x''' & 14a-26b+6c & 3a-5b+3c & -7a+14b+c \end{vmatrix}=0,$$

откуда следует, что перемещающий множитель $M(a, b, c)$ есть

$$M(a, b, c) = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 4a - 6b + 2c & a - b + c & -a + 2b + c \\ 8a - 14b + 4c & 2a - 3b + 2c & -3a + 6b + c \end{vmatrix}.$$

Этот перемещающий множитель не может быть тождественно равен нулю, так как, полагая

$$a = 1, \ b = 0, \ c = 0,$$

мы находим

$$M(1, 0, 0) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix} = +1.$$

Объяснение этого обстоятельства состоит в том, что элементарные делители рассматриваемой матрицы суть взаимно-простые

В самом деле, переставив в рассматриваемой матрице 1-ый и 3-ий столбцы и добиваясь нулей в первой строке, мы получим

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 4-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -6 \\ 1-\lambda & 1 & 2 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 1-\lambda & 2-\lambda & (1-\lambda)(4-\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Превратив в нули элементы 1-го столбца и, затем, вычтя из 3-ей строки вторую, имеем

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & (1-\lambda)(4-\lambda) \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 0 & 1 & (1-\lambda)(4-\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Отсюда перемена знака у 1-го столбца и перестановка 2-ой и 3-ей строк даст

$$\left\| \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & (1-\lambda)(4-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \end{array} \right\|.$$

Дальнейшие вычисления бесполезны, так как мы уже имеем $E_1(\lambda) \equiv 1$ и $E_2(\lambda) \equiv 1$ и, значит, установили взаимную простоту элементарных делителей данной матрицы.

Возьмем в заключение пример

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{array} \right\|.$$

Здесь сразу видно, что корень векового уравнения $\lambda_1 = 1$ есть двойной и корень $\lambda_2 = 2$ простой. Кроме того, без всяких вычислений, из сравнений с формулами (95), (96) и (98) видно, что элементарными делителями предложенной матрицы будут

$$(\lambda-1)^2, \ (\lambda-2).$$

И так как они, очевидно, взаимно-просты, то перемещающий множитель $M(a, b, c)$ в рассматриваемом случае не тождественно равен нулю.

Чтобы убедиться в этом, возьмем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q_1' &= q_1 + q_2 \\ q_2' &= \phantom{q_1 +{}} q_2 \\ q_3' &= 2q_3 \end{aligned}$$

и положим

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3.$$

Дифференциальное уравнение для переменной x напишется в виде

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x' & a & a+b & 2c \\ x'' & a & 2a+b & 4c \\ x''' & a & 3a+b & 8c \end{vmatrix} = 0$$

откуда видно, что перемещающий множитель $M(a, b, c)$ есть

$$M(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & 2c \\ a & 2a+b & 4c \end{vmatrix}.$$

Что он не тождественен нулю, в этом убеждаются, полагая, согласно ранее сделанным рассуждения,

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

В самом деле, при таком выборе параметров имеем

$$M(1, 0, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = +1.$$

Однако, — и в этом особенность примера — здесь уже невозможно удержать более простой выбор

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

так как при нем перемещающий множитель M обращается в нуль.

§ **7.** Заканчивая рассмотрения, мы видим, что проблема III о критерии тождества перемещающего множителя $M(a, b, c, \ldots, f)$ нулю, получила — в известном смысле — решение. Однако, проблема II о выборе, в случае нетождества M нулю, численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, неуничтожающих перемещающего множителя M, не получила полного решения, так как мы ограничились лишь указанием частного такого выбора, достигающего, правда, цели, но могущего иногда оказаться и невыгодным.

Далее, мы оставили совсем без рассмотрения интересную и более трудную проблему I о случае, когда перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ есть *знакопостоянная форма* параметров $a, b, c, \ldots, f$. Этот интересный случай, вероятно, естественно свяжется с рассмотрением косых симметрических матриц $\underline{A}$ $(a_{ij} = -a_{ji})$.

Следует, наконец, заметить, что мы остановили рассмотрения на пункте, представляющем новые трудности. Это как раз есть случай тождества перемещающего множителя $M(a, b, c, \ldots, f)$ нулю. Автор рассматриваемой нами методы, в конце своей работы кратким замечанием раскрывает сущность этого случая указав, что тогда переменная x, определенная равенством

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k \tag{9}$$

лишь формально зависит от k произвольных постоянных, входящих в состав общего интеграла

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \ldots, q_k$$

системы дифференциальных уравнений (7), но что, *по существу*, число произвольных постоянных, от которых зависит x (при заданных $a, b, c, \ldots, f$) сводится к меньшему числу, в результате чего переменная x должна удовлетворять, при любом выборе заданных численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, дифференциальному уравнению не k-го порядка, а низшего. Так как дифференциальное уравнение для x должно получиться, исключая из системы (17) неизвестные $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, то значит, как указывает автор, это исключение может быть выполнено не из полного числа $k+1$ уравнений (17), а из меньшего их числа. Это обстоятельство и вызывает тождественное уничтожение перемещающего множителя

$$M(a, b, c, \ldots, f).$$

В этом случае одно из уравнений (17) есть просто линейная комбинация остальных, *при любых* $a, b, c, \ldots, f$.

Случай, когда одно из уравнений системы (17) есть линейная комбинация остальных и, значит, когда исключение неизвестных $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ может быть выполнено не из полного числа $k+1$ уравнений (17), а из меньшего, может представиться всегда, даже тогда, когда все корни векового уравнения (1) различны: достаточно для этого просто попасть на пе-

удачный выбор численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$ взяв, например, точку $P(a, b, c, \ldots, f)$ на одной из $k-1$-мерных плоскостей $\gamma_i = 0$ (34), где i есть одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, k$; при таком выборе численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ «случайным образом» окажется нулем. В указываемом случае, впрочем, этого избегают, выбирая, при составлении дифференциального уравнения для x, численные величины параметров $a, b, c, \ldots, f$ более удачным образом, и тогда $M(a, b, c, \ldots, f)$ становится отличным от нуля.

Но в случае тождественного уничтожения перемещающего множителя M, этот прием применить больше нельзя. И в этом случае автор рассматриваемой методы указывает на необходимость сначала вычеркнуть из системы (17) последовательно, начиная с нижнего, все те уравнения, которые являются лишними, и произвести исключение всех переменных

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$$

из того наименьшего числа верхних уравнений, при котором оно возможно.

Здесь в высокой степени вероятно, что нужные независимые уравнения системы (17) следуют одно за другим без пропуска, начиная с самого верха, так что среди них нет линейных комбинаций и что число этих нужных уравнений зависит от выбора численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$. По аналогии с предыдущим, вероятно следует рассматривать как удачный тот выбор численных величин параметров $a, b, c, \ldots, f$, при котором число независимых верхних уравнений системы (17) является максимальным.

Таким образом, и в случае тождества нулю перемещающего множителя M, остается в силе проблема II наиболее благоприятного выбора численных значений параметров, как и проблема составления дифференциального уравнения для x.

Вполне возможно, что эти рассмотрения находятся в некоторой связи с изысканиями акад. А. М. Ляпунова об устойчивости движения.

Прибавим наконец, что в стиле современной науки и, может быть, в интересах теории квантов было бы искать распространения рассмотрений на *бесконечные* матрицы и тем самым установить связь между методой акад. А. Н. Крылова и идеями И. Фредгольма.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

EINE VERALLGEMEINERUNG DES LAPLACE-LIAPOUNOFFSCHEN SATZES

Von A. KOLMOGOROV (A. Kolmogoroff)

(Présenté par S. Bernstein, *membre de l'Académie des Sciences)*

Es seien

$$x_1,\ x_2, \dots x_n, \dots$$

voneinander unabhängige zufällige Grössen mit den mathematisshen Erwartungen

$$E(x_n) = 0,\ E(x_n{}^2) = 2b_n,\ E(|x_n|^3) = d_n;$$

die Verhältnisse $d_n : b_n$ seien dabei ihrem Betrage nach sämtlich kleiner als eine feste Konstante:

$$\frac{d_n}{b_n} \leq \mu. \tag{1}$$

Man setze

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s_n,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = t_n;$$

es ist dann eine der wichtigsten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Verlauf der Summen s_n mit der Änderung von t_n zu untersuchen und zwar in der Annahme, dass n gross und μ klein ist.

Auf Grund des schon klassisch gewordenen Liapounoffschen Satzes* hat man

$$(2) \qquad P(a < s_n < b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_n}} \int_a^b e^{-\frac{s^2}{4t_n}} ds + \theta R(t_n, \mu),$$

$$|\theta| \leqslant 1,$$

wobei P die Wahrscheinlichkeit der eingeklammerten Ungleichung bedeutet und $R(t, \mu)$ mit μ gleichmässig gegen Null konvergiert, wenn nur t grösser als eine positive Konstante T ist.

Bei festem n hat man also ein asymptotisches Verteilungsgesetz für s_n. Das nächste weitere Problem ist das folgende: es seien $a(t)$ und $b(t)$ zwei Funktionen von t, gefragt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit werden *alle* Ungleichungen

$$(3) \qquad a(t_k) < s_k < b(t_k), \qquad k=1, 2, \ldots, n,$$

erfüllt?

Wir setzen weiter voraus, dass $a(t)$ und $b(t)$ stetig differenzierbar sind und dass

$$a(t) < b(t), \quad a(0) < 0 < b(0)$$

ist. In diesen Voraussetzungen kann man eine asymptotische Lösung des soeben gestellten Problems erhalten, welche ganz analog mit (2) ist.

Man kann alle endlichen Folgen

$$s_1, \quad s_2, \ldots, s_n,$$

(bis s_n) in die folgenden drei Klassen verteilen:

K alle Folgen umfasst, für welche alle Ungleichungen (3) erfüllt sind.

K_1 — diejenigen Folgen, für welche ein solches k existiert, dass

$$a(t_i) < s_i < b(t_i), \qquad i=1, 2, \ldots, k-1,$$

$$s_k \leqslant a(t_k)$$

gilt.

* Vgl. Liapounoff, Sur une proposition de la theorie des probabilités. Bull. Acad. sci. St. Pétersbourg, 13 (1900), S. 359.

K_2 — diejenigen Folgen, für welche ein solches k existiert, dass

$$a(t_i) < s_i < b(t_i), \qquad i=1, 2, \ldots, k-1,$$
$$b(t_k) \leqslant s_k$$

gilt.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man mit P_n, $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}$. Endlich, wird die Wahrscheinlichkeit, dass

$$a(t_k) < s_k < b(t_k), \qquad k=1, 2, \ldots, n-1,$$
$$x < s_n < y$$

ist, durch $P_n(x, y)$ bezeichnet. Offensichtlich ist

(4) $$P_n = P_n\{a(t_n), b(t_n)\}.$$

Die Ungleichungen

$$0 < t,$$
$$a(t) < s < b(t)$$

definieren in der (s, t) — Ebene ein Gebiet G. Wir bezeichnen mit $g(s_0, t_0, s, t)$ die Greensche Funktion * der Wärmegleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

für das Gebiet G und setzen

$$g(s, t) = g(0, 0, s, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} g(s, t) = u(s, t),$$

$$v_1(t) = -u\{a(t), t\},$$

$$v_2(t) = u\{b(t), t\}.$$

* Vgl. Gevrey. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journ. de Math. pures et appl., 9 (1913), S. 305.

Satz. *Es gelten die folgenden asymptotischen Formeln:*

$$P_n(x, y) = \int_x^y g(s, t_n)\, ds + \theta R(t_n, \mu), \tag{5}$$

$$P_n^{(1)} = \int_0^{t_n} v_1(t)\, dt + \theta_1 R_1(\mu), \tag{6}$$

$$P_n^{(2)} = \int_0^{t_n} v_2(t)\, dt + \theta_2 R_2(\mu), \tag{7}$$

$$|\theta| \leqslant 1, \quad |\theta_1| \leqslant 1, \quad |\theta_2| \leqslant 1,$$

wobei $R(t, \mu)$, $R_1(\mu)$ *und* $R_2(\mu)$ *mit* μ *gegen Null konvergieren, die Konvergenz von* $R(t, \mu)$ *ist dabei nach* t *gleichmässig, wenn nur* t *grösser als eine beliebige positive Konstante* T *ist.*

Wenn statt (3) nur die einseitigen Ungleichungen, z. B. von der Form

$$a(t_k) < s_k, \tag{8}$$

vorkommen, erhält man ganz analoge Resultate, welche übrigens leicht durch Grenzübergang aus unserem Satze abgeleitet werden können.

Göttingen, 20 I 1931.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

А. Н. КРЫЛОВА

§ 1. В руководствах по сопротивлению материалов обыкновенно излагается данная Эйлером упрощенная теория продольного изгиба сжатых стоек и выводятся его формулы для величины предельной нагрузки, при которой прямолинейная форма равновесия теряет устойчивость. У техника и инженера сами собою возникают вопросы о том, что на самом деле произойдет со стойкой, когда нагрузка превысит Эйлеров предел, какова тогда форма или формы, если их несколько, равновесия, как велик будет «боковой прогиб» и «усадка» стойки, каковы будут эти величины, если нагрузка «весьма мало» превысит предельную, будут ли тогда «малая» усадка и «малый» прогиб того же порядка малости как и превышение нагрузки или иного и какого именно?

Однако эти вопросы не находят освещения в известной мне технической литературе по кораблестроению, и в обычных руководствах по сопротивлению материалов, в которых лишь иногда упоминается, что решение подобных вопросов требует применения теории эллиптических функций, которая в обычный объем курсов технических и инженерных училищ не входит.

Действительно, обращаясь к руководствам по теории эллиптических функций, мы например во II томе знаменитого: Traité des Fonctions elliptiques par G. Halphen, находим подробное рассмотрение общей теории изгиба тонкого стержня, но, главным образом, не в смысле технических приложений, а как геометрической задачи, представляющей поучительный пример приложения эллиптических функций и притом в их Вейерштрассовой форме. При этом изложении предполагается, что читатель предварительно

изучил весь громадный I том сочинения Halphen'а, в котором дается теория тех функций, которыми он пользуется.

В более элементарных руководствах, например, L. Levy: Précis élémentaire des Fonctions elliptiques или P. Appell et E. Lacour: Principes de la théorie des Fonctions elliptiques, также излагается эта теория, в последнем даже весьма подробно, но опять-таки как геометрическая задача на применение, главным образом, функций Вейерштрасса, хотя в § 126 простейший случай изгиба решен и в функциях Якоби.

В классическом руководстве по теории упругости A. Love, задача о стойках решена в функциях Якоби, но формулы не приведены к удобному для численных вычислений и пользованию готовыми таблицами виду, и недостаточно освещена наиболее важная для приложений в технике сторона дела.

В руководстве J. Prescott: Applied Elasticity, весьма подробно изложена теория Эйлера и в §§ 88—89 излагается общая теория упругой линии и показывается ее связь с задачей о колебаниях маятника, но вопрос не доводится до конца, так как не развиты формулы для вычисления координат точек кривой представляющей формы равновесия стойки, хотя фиг. 48 и 49 изображающие две типичные формы вычерчены правильно. Вместе с тем по разложению в ряд полного эллиптического интеграла первого рода получается значение критической нагрузки данное Эйлером.

Таким образом, Prescott, дает приблизительно то что изложено в начале статьи Лагранжа «Sur les figures des colonnes» (Oeuvres, t. II), так как именно в этой статье Лагранж выразил через эллиптический интеграл первого рода ординату первоначально прямой стойки при ее продольном изгибе. Еще более изящный прием интегрирования уравнения изгиба, он дал в статье «Sur la force des ressorts pliés» (Oeuvres, t. III).

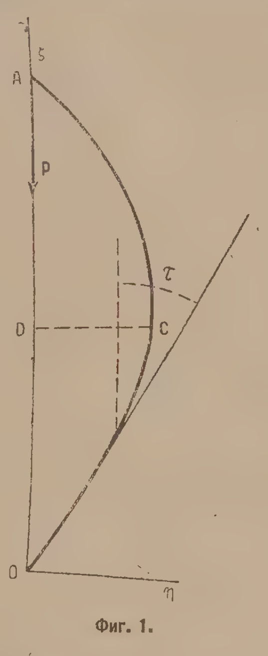
Во времена Лагранжа таблиц эллиптических интегралов еще не было (они изданы Лежандром в 1826 г., т. е. через 12 лет после смерти Лагранжа и через 56 лет после его статьи о форме колонн), но теперь эти таблицы в сокращенных извлечениях общедоступны,* поэтому естественно для практических приложений задачу о формах равновесия стоек и задачу об упругой линии вообще решать в эллиптических интегралах, для которых есть готовые таблицы, а не в эллиптических функциях, для которых таблиц нет.

* Таблицы Лежандра недавно полностью переизданы в Германии под заглавием: Legendr'es Tafeln der elliptischen Integrale, herausgegeben von. Fr. Emde. K. Wittwer, Stuttgard, 1931.

В этой статье я и показываю такое решение задачи о формах равновесия стоек при обычных в технике условиях закрепления концов. Решение это совершенно не требует сложного аппарата теории эллиптических функций, достаточно самого элементарного понятия об эллиптических интегралах, в сущности сводящееся к приведению их в простейшем случае к тому каноническому виду, для которого Лежандром сто лет тому назад составлены таблицы, и к пользованию этими таблицами.

Вместе с тем показывается простейший способ вычерчивания форм равновесия стойки, ибо для техника чертеж гораздо нагляднее всяких формул выясняет сущность дела.

§ **2.** Итак рассмотрим нашу задачу в технической ее постановке: дана первоначально прямолинейная стойка OA (фиг. 1), к верхнему концу которой приложена направленная вертикально вниз нагрузка P, требуется определить, сохранит ли стойка свою прямолинейную форму (чистое сжатие) или вследствие неустойчивости этой формы примет криволинейную форму равновесия OCA и тогда какую именно.



Фиг. 1.

Для полной определенности задачи необходимо еще указать способы закрепления концов стойки; обычные способы таковы:

1) Нижний конец O подперт, верхний A удерживается на оси $O\zeta$ (вертикальной) и может перемещаться лишь по этой оси.

2) Нижний конец O заделан верхний A свободен.

3) Оба конца заделаны.

4) Один конец заделан, другой подперт.

§ **3.** Начнем с простейшего I случая и положим, что стойка приняла показанную на фиг. 1 форму равновесия не имеющую точек перегиба и не пересекающую ось $O\zeta$.

Возьмем сечение N определяемое длиною дуги $ON=\sigma$ нейтральной оси, форму которой только и рассматриваем. Сделаем следующие обозначения: ζ, η — координаты точки N, l длина стойки, I наименьший момент

инерции площади сечения ее, перпендикулярно к оси коего и возьмем плоскость чертежа, E модуль упругости материала, ρ — радиус кривизны кривой ONA в точке N, тогда уравнение равновесия будет:

$$(*) \qquad EI\frac{1}{\rho} = M,$$

где M изгибающий момент в точке N:

$$M = -P\eta;$$

вместе с тем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta\, d\zeta - d^2\zeta d\eta}{d\sigma^3}$$

$$d\eta^2 + d\zeta^2 = d\sigma^2.$$

Введем вместо переменных: $\zeta, \eta, \sigma, \rho$ переменные z, y, s, r определяемые равенствами

$$\zeta = lz, \quad \eta = ly, \quad \sigma = ls, \quad \rho = lr;$$

положим

$$\frac{Pl^2}{EI} = 2a^2$$

и будем производные по переменной s обозначать значками, тогда уравнение равновесия примет вид

$$(1) \qquad y''z' - z''y' = -2a^2y;$$

вместе с тем будет

$$(2) \qquad z'^2 + y'^2 = 1$$

Из уравнения (2) следует

$$z'z'' + y'y'' = 0,$$

отсюда имеем

$$y'' = -\frac{z''z'}{y'}$$

и, подставив эту величину в ур. (1), получим на основании ур. (2)

$$(3) \qquad z'' = 2a^2yy'$$

и по интегрировании

$$z' = h + a^2 y^2, \tag{4}$$

где h есть произвольная постоянная, геометрическое значение которой есть

$$h = z'_0 = \cos \tau_0,$$

где τ_0 есть наклонение касательной OT_0 к оси $O\zeta$. На основании ур. (2) имеем

$$y' = \sqrt{1 - z'^2} = \sqrt{1 - (h + a^2 y^2)^2} =$$

$$= \sqrt{[1 - h - a^2 y^2] \cdot [1 + h + a^2 y^2]},$$

а так как

$$y' = \frac{dy}{ds},$$

то будет

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{(1 - h - a^2 y^2)(1 + h + a^2 y^2)}},$$

при чем перед корнем взят знак $+$, ибо при возрастании дуги s ордината y также возрастает, пока мы не дойдем до вершины C соответствующей значению $s = \frac{1}{2}$, ибо очевидно что кривая имеет ось симметрии CD.

Так как $h < 1$, то положим

$$1 - h = f^2; \quad 1 + h = g^2,$$

тогда будет

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(g^2 + a^2 y^2)(f^2 - a^2 y^2)}}, \tag{5}$$

Чтобы привести этот интеграл к каноническому виду полагаем:

$$ay = f \cos \varphi \tag{6}$$

тогда:

$$a dy = - f \sin \varphi . d\varphi$$

$$\sqrt{f^2 - a^2 y^2} = f \sin \varphi; \quad \sqrt{g^2 + a^2 y^2} = \sqrt{2 - f^2 \sin^2 \varphi},$$

положив

$$k^2 = \frac{f^2}{2}, \tag{7}$$

получим:

$$\sqrt{2}as = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{5'}$$

Лежандр, составляя свои таблицы положил

$$k = \sin \theta \tag{8}$$

и с аргументами θ и φ от 0 до 90° составил таблицы функций:

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}$$

и

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, . \, d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \, . \, d\varphi,$$

называемых эллиптическими интегралами первого и второго вида.

При таком обозначении уравнение (5′) напишется

$$\sqrt{2}as = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi), \tag{9}$$

Величины $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$, которые зависят очевидно только от k, обозначают через K и E, тогда уравнение (9) напишется так:

$$K - \sqrt{2}as = F(\varphi). \tag{10}$$

Пользуясь таблицами Лежандра, которые в извлечении можно найти напр. в книге L. Levy упомянутой выше, по *известному* значению «модуля» k, находится K, а затем по аргументу φ вычисляется величина y по формуле

$$y = \frac{f}{a} \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}k}{a} \cos \varphi. \tag{11}$$

Чтобы найти z, обращаемся к ур. (4), из которого следует

$$z' = h + f^2 \cos^2 \varphi = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$$

так что будет

$$z = \int_0^s (1 - 2k^2 \sin^2 \varphi)\, ds = s - 2k^2 \int_0^s \sin^2 \varphi\, ds.$$

Но на основании ур. (9)

$$ds = -\frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

следовательно

$$z = s + \frac{\sqrt{2}}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{k^2 \sin^2 \varphi . d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Но очевидно будет

$$\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin^2 \varphi . d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot d\varphi - \int_0^{\varphi} \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot d\varphi = F(\varphi) - E(\varphi);$$

значит

$$z = s - \frac{\sqrt{2}}{a} \left[F(\varphi) - E(\varphi)\right]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = s - \frac{\sqrt{2}}{a} [K - E - (F(\varphi) - E(\varphi))].$$

Заменив s его величиною следующей из ур. (10) получим на основании формулы (13) приведенной ниже:

$$(12) \qquad z = \frac{1}{2K} [(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))].$$

Уравнениями (11) и (12) форма стойки вполне определяется, когда модуль k *известен*, ибо φ можно рассматривать как переменную независимую, границы изменяемости которой определяются по ур. (10).

Остается определить значение модуля k по заданной нагрузке и элементам стойки.

§ **4.** Для определения значения модуля k стоит только положить в ур. (10) $s = \frac{1}{2}$, при каковом значении угол $\varphi = 0$, значит $F(\varphi) = F(0) = 0$ и мы получим

(13) $$K = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

по этому значению величина k непосредственно и найдется по таблице Лежандра.

Тогда уравнение (11) напишется так:

(11′) $$y = \frac{k}{K}\cos\varphi.$$

Из формулы

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

очевидно, что при всяком k

$$K > \frac{\pi}{2}$$

и лишь при $k = 0$ будет

$$K = \frac{\pi}{2}$$

Значит равенство (13) может иметь место лишь при условии

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2},$$

т. е.

(13′) $$2a^2 > \pi^2,$$

но

(*) $$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

следовательно, чтобы могла существовать криволинейная форма равновесия необходимо, чтобы было

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

как это следует из неравенства (13′) и формулы (*).

В этом случае при $s=0$ будет

$$y=0 \text{ и } \varphi=\frac{\pi}{2},$$

ибо k не равно нулю.

Если же будет

$$P \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{14}$$

то из условия, чтобы при $s=0$ было $y=0$, следует

$$k=0$$

и значит при всяком значении s будет

$$y=0 \text{ и } z=s,$$

т. е. стойка сохраняет прямолинейную форму равновесия, в этом случае единственную.

Условие (14) и есть как раз условие Эйлера. Нетрудно видеть, что если к условию

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или что то же

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

присовокупить

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < 2\frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$P < 4\pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

то рассматриваемая форма не пересекающая в промежутке от $s=0$ до $s=1$ оси $O\zeta$ есть единственная криволинейная форма равновесия, которая тогда и есть форма устойчивая, прямолинейная же не устойчивая.

Так как для нас представляет наибольший интерес лишь та форма равновесия, при которой нагрузка лишь «мало» превышает Эйлерову, то мы и ограничимся случаем, когда

$$2\frac{\pi}{2} > \frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

и форма равновесия определяется равенствами

$$K = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

(I)
$$y = \frac{k}{K} \cos\varphi$$

$$z = \frac{1}{2K}[(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))].$$

Координаты вершины C получаются положив

$$s = \frac{1}{2}$$

чему соответствует $\varphi = 0$, так что

(II)
$$y_c = \frac{k}{K}$$

$$z_c = \frac{E}{K} - \frac{1}{2}.$$

Значения y и z для s от $\frac{1}{2}$ до 1, т. е. для верхней половины стойки, следуют из (I) по условию симметрии относительно оси CD.

Заметим еще, что из формулы

$$dz = ds.\cos\tau$$

следует

$$z' = \cos\tau$$

и из формулы

$$z' = 1 - 2k^2 \sin^2\varphi$$

следует:

$$1 - \cos\tau = 2\sin^2\frac{\tau}{2} = 2k^2\sin^2\varphi,$$

т. е.

(15)
$$\sin\frac{\tau}{2} = k\sin\varphi,$$

что доставит значение угла наклонения касательной в любой точке кривой, отсюда же видно что при $s=0$, т. е. в точке 0, для которой $\varphi=\frac{\pi}{2}$, будет

$$\sin\frac{\tau_0}{2}=k=\sin\theta,$$

т. е.

(15′) $$\tau_0=2\theta$$

Из форм. (II) видно, что для точки A будет

$$y_a=y_0=0$$

$$z_a=2z_c=2\frac{E}{K}-1$$

и значит «оседание» верхнего конца стойки

(16) $$m=1-z_a=2\left[1-\frac{E}{K}\right].$$

Все эти величины представляют числа отвлеченные, чтобы получить по ним линейные размеры, т. е. величины η, ζ, η_c, ζ_c, μ, надо длину балки l умножить на числа: y, z, y_c, z_c, m.

§ **5.** Покажем теперь на примере порядок вычисления по форм. I. Пусть будет

$$a=\frac{\pi}{2}\cdot 1.1=1.7279,$$

так что

$$P=1.21\frac{\pi^2 EI}{l^2}=1.21\,P_e,$$

т. е. P превышает на 21% Эйлерову нагрузку P_e.

В таблице значений K и E соответствующих аргументу θ находим:

θ	K	E
...		.....
34⁰	1.7214	1.4397
35⁰	1.7313	1.4322

значит при

$$K=1.7279$$

будет

$$\theta = 34^0 + 60' \cdot \frac{65}{99} = 34^0\,39',$$

так что

$$k = \sin 34^0\,39' = 0.5686$$

и при

$$\theta = 34^0\,39'$$

будет

$$E = 1.4397 - \frac{39}{60} \cdot 75 = 1.4348,$$

значит координаты вершины суть

$$y_c = \frac{k}{K} = \frac{0.5686}{1.7279} = 0.329$$

$$z_c = \frac{E}{K} - \frac{1}{2} = \frac{1.4348}{1.7279} - 0.5 = 0.330.$$

Эти значения выражены в долях длины l, значит

$$\eta_c = 0.329\,l$$

$$\zeta_c = 0.330\,l$$

$$\mu = l - 2\zeta_c = 0.340\,l.$$

Чтобы получить координаты промежуточных точек надо задавать значения угла φ от 90^0 до 0, и по таблицам Лежандра приискать при найденном θ соответствующие значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$, и применить формулу (I), присовокупив к ним формулу

$$\sin\frac{\tau}{2} = \sin\theta\sin\varphi = k\sin\varphi, \tag{15}$$

чтобы иметь уклон касательной.

Таким образом положив φ равным

$$15^0,\ 30^0,\ 45^0,\ 60^0,\ 75^0$$

при $\theta = 30^0$ и 35^0 находим в сокращенных таблицах Лежандра приведенных в книге L. Levy нижепоказанные значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$, пользуясь которыми по простой интерполяции составляем требуемые нам значения при угле $\theta = 34^0 39'$.

φ	F(φ)			E(φ)		
	$\theta = 30°$	$\theta = 35°$	$\theta = 34°39'$	$\theta = 30°$	$\theta = 35°$	$\theta = 34°39'$
15°	0.2625	0.2628	0.2628	0.2611	0.2608	0.2608
30	0.5294	0.5313	0.5311	0.5179	0.5161	0.5163
45	0.8044	0.8109	0.8101	0.7672	0.7613	0.7618
60	1.0896	1.1049	1.1029	1.0076	0.9945	0.9962
75	1.3846	1.4134	1.4102	1.2399	1.2167	1.2197

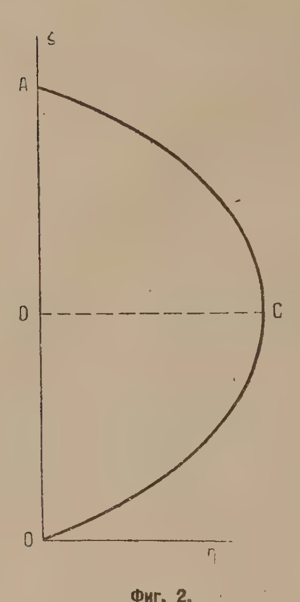
По этим значениям и уже известным

$$y_c = 0.329; \quad K = 1.7279; \quad E = 1.4348$$

составляем такую сводную табличку

φ	y	z	τ
90°	0	0	69°18′
75	0.085	0.032	66 30
60	0.165	0.073	56 20
45	0.232	0.138	46 30
30	0.285	0.185	33 00
15	0.318	0.255	16 50
0	0.329	0.330	0 0

Имея координаты этих точек и уклоны касательных в них можем с большою точностью начертить форму кривой, которая и показана на фиг. 2.



Фиг. 2.

В виду столь значительного прогиба и оседания

$$\eta_c = 0.329\, l, \quad m = 0.340\, l,$$

когда нагрузка превышает Эйлерову всего на 21%, составим еще значения прогибов и оседания при

$$a = 1.01\ \frac{\pi}{2}$$

и

$$a = 1.001\,\frac{\pi}{2},$$

т. е. при нагрузках превышающих Эйлерову на 2% и на 0.2%, получим совершенно подобно предыдущему

a	P	y_c	z_c	m
$1.01\ \frac{\pi}{2}$	$1.02\ P_e$	0.125	0.480	0.040
$1.001\ \frac{\pi}{2}$	$1.002\ P_e$	0.039	0.49957	0.00086

Значительная величина прогиба и оседания при превышении всего на 2% Эйлеровой нагрузки показывает насколько важно не превосходить ее, ибо если эта нагрузка превзойдена, то или сооружение разрушается, как это было, например, при знаменитом крушении моста через реку св. Лаврентия в Квебеке при постройке его, или же стойка восприняв нагрузку практически равную Эйлеровой получит такую усадку, что остальной избыток нагрузки будет восприниматься не этой стойкой, а прочими более жесткими частями сооружения. Было бы слишком долго излагать здесь как с этим обстоятельством считаются и как его учитывают в кораблестроении.

Нетрудно указать причину значительных прогибов балки при малом превышении Эйлеровой нагрузки и составить приближенные формулы для

вычисления координат вершины и оседания не пользуясь таблицами Лежандра.

При малых значениях модуля k величина K разлагается в следующий быстро сходящийся ряд, в котором достаточно удержать лишь первые члены:

$$K=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\ldots\right),$$

поэтому когда мы берем

$$P=(1+2\varepsilon)P_c,$$

то соответствующее значение K при малом ε будет

$$K=(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2},$$

следовательно

$$\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4=\varepsilon,$$

значит

$$k=2\sqrt{\varepsilon}\left(1-\frac{9}{32}\varepsilon\right),$$

следовательно

$$y_c=\frac{k}{K}=\frac{4}{\pi}\sqrt{\varepsilon}\left(1-\frac{41}{32}\varepsilon\right)=1.273\sqrt{\varepsilon}(1-1.28\varepsilon).$$

Для величины E имеется разложение

$$E=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4-\ldots\right],$$

поэтому будет приближенно

$$\frac{E}{K}=1-\frac{1}{2}k^2-\frac{3}{16}k^4=1-2\varepsilon-3\varepsilon^2,$$

следовательно

$$z_c=\frac{1}{2}-2\varepsilon-3\varepsilon^2$$

$$m=4\varepsilon-6\varepsilon^2.$$

Так например, при

$$\varepsilon=0.01$$

будет

$$y_c = 0.127\,(1 - 0.0013) = 0.125$$

$$z_c = 0.500 - 0.020 = 0.480$$

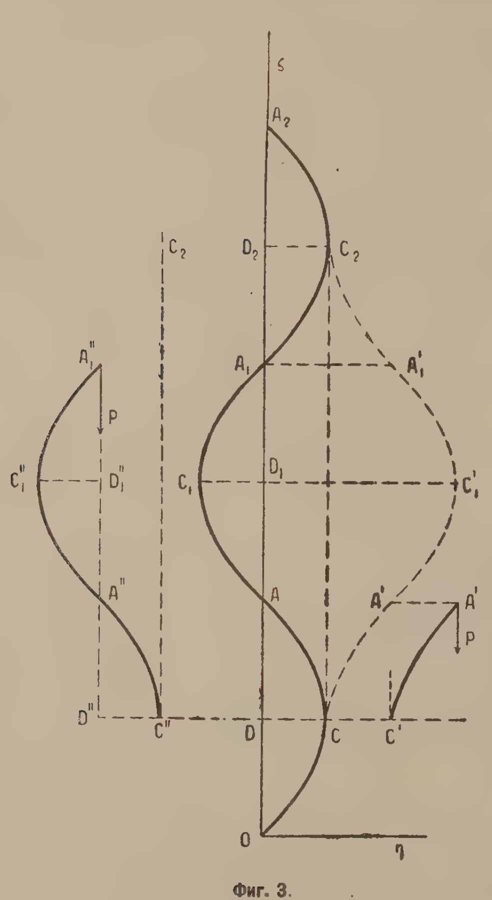
$$m = 1 - 0.960 = 0.040,$$

что мы имели и по таблицам.

Из этих формул видно, что когда превышение нагрузки пропорционально малой величине ε, то прогиб, выражаясь формулою

$$y_c = 1.27\,\sqrt{\varepsilon}\,(1 - 1.28\varepsilon)$$

пропорционален $\sqrt{\varepsilon}$, т. е. порядок «малости» его есть половинный, от порядка малости увеличения нагрузки; оседание же одинакового с увеличением нагрузки порядка малости.



Фиг. 3.

§ 6. Начертив на основании указанных в предыдущем § вычислений форму равновесия стойки при указанном закреплении ее концов и соответствующем действующей нагрузке значении параметра a можно начертить без всяких вычислений формы равновесия стойки при всех прочих условиях закрепления концов.

В самом деле пусть на фиг. 3 кривая OCA представляет форму заданной стойки длиною l под действием нагрузки P.

В точке A изгибающий момент равен нулю, к ней приложена вертикальная сила P, направленная вниз.

Проведем в точке C касательную CT и примем ее за новую ось ζ_1. В точке C изгибающий момент равен $P\eta_c$, этот момент вместе с реакцией $-P$ представляет действие нижней части OC стойки на верхнюю ее часть CA, ясно, что если часть OC убрать, а в точке C приложить пару с моментом $P\eta_c$ и реакцию $-P$, то равновесие не нарушится, а тогда можно рассматривать, что стойка CA длина коей $l_1 = \frac{l}{2}$ заделана в точке C вертикально и к свободному ее концу A приложена сила P. Значит кривая CA или симметричная с нею кривая CA' представляет форму равновесия такой стойки. Эта форма имея шаблон OCA очевидно сразу вычерчивается.

Заметив, что для стойки OA предельная нагрузка есть

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

видим, что эта же нагрузка есть предельная и для стойки CA' длина коей $l_1 = \frac{1}{2} l$, поэтому заменив l его величиною $2l_1$ имеем

$$P_e = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l_1^2}$$

в каковом виде обыкновенно эту формулу и приводят.

Само собою разумеется, что нетрудно простым преобразованием координат перейти от уравнения кривой OC отнесенной к осям $O\eta$ и $O\zeta$, к уравнению кривой CA', но проще делать это прямо графически.

Нарастим нашу основную стойку OA еще двумя AC_1A_1 и $A_1C_2A_2$, перенесем нагрузку в точку A_2 и вообразим что все три стойки в точках A, A_1, A_2 скреплены, тогда имеем форму $OCA\,C_1A_1C_2A_2$ стойки OA_2 длина которой $3l$; эта форма пересекает ось $O\zeta$, по направлению которой действует нагрузка в точках A и A_1, причем это суть точки перегиба нашей кривой, ибо в них изгибающий момент и кривизна равны нулю.

Проведем в точке C касательную, которая будет касательной и в точке C_2.

В точках C и C_2 на участках CC_1C_2 от частей OC и A_2C_2 происходят реакции равные P и изгибающие моменты $M = P\eta_c$, если части OC и A_2C_2 убрать приложив в точках C и C_2 упомянутые реакции и изгибающие пары, то стойка $CAC_1A_1C_2$ останется в равновесии — ясно что это

есть форма равновесия стойки длиною $l_1 = 2l$ заделанной в точках C и C_2 и подверженной нагрузке P.

Очевидно, что и симметричная с нею кривая $CA' C_1' A_1' C_2$ есть такая же форма равновесия, вычерчивание этих форм, когда вычерчена форма OCA нашей основной стойки настолько очевидно, что пояснений не требует.

Эйлерова нагрузка

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

предельная для основной стойки является предельной и для произведенных от нее.

Заменив в предыдущей формуле величину l ее значением $\frac{1}{2} l_1$ получим

$$P_e = \frac{4\pi^2 EI}{l_1^2}$$

как величину Эйлеровой нагрузки для стойки, которая заделана в обоих концах своих и длина коей l_1.

Вообразим нашу заделанную в обоих концах стойку $CAC_1 A_1 C_2$; в точке A_1 изгибающий момент равен нулю, в ней действует только вертикальная реакция P, поэтому оставив точку C заделанной, уберем часть $A_1 C_2$ стойки, приложив взамен в точке A_1, силу P направленную вертикально вниз, стойка $CAC_1 A_1$ будет в равновесии и значит эта кривая представит форму равновесия стойки, длина которой $l_1 = \frac{3}{2} l_1$, которая заделана в точке C, имеет свободный конец A_1, на который действует вертикальная сила P.

Предельная нагрузка для такой формы изгиба по прежнему есть

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

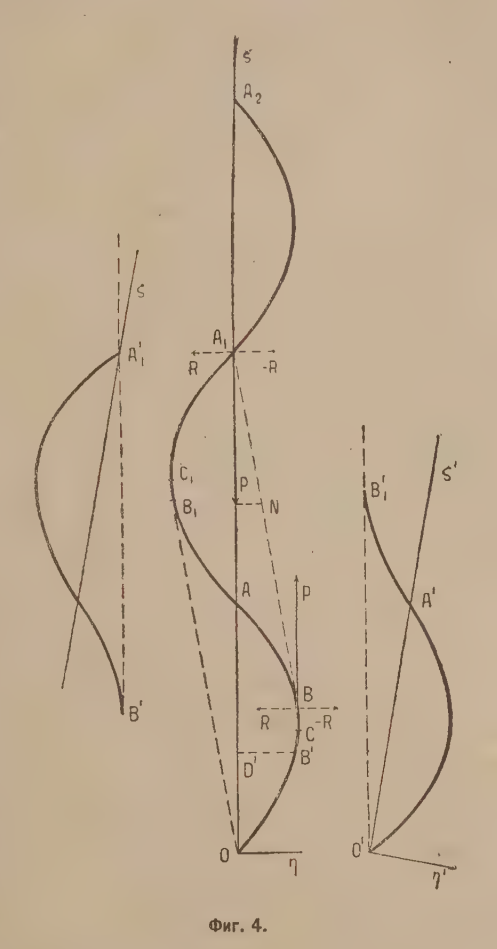
или, заменив l его величиной $\frac{2}{3} l_1$, получим

$$P_e = \frac{9}{4} \pi^2 \frac{EI}{l_1^2}.$$

От формы равновесия $OCAC_1 A_1$ можно перейти к определению формы равновесия, когда один конец стойки заделан другой подперт.

Положим, что заделан нижний конец стойки. Возьмем точку A_1, в этой точке приложена сила P по *направлению* A_2A и точка A_2 по предположению остается на этой прямой. Проведем через точку A_1 касательную к кривой $OCAC_1A_1$, пусть B есть точка касания, которая расположится близ точки C. Обозначим через α угол составляемый этой касательной с осью $O\zeta$, приложим в точках A и B по две силы R и $-R$ направленные горизонтально в противуположные стороны, причем $R = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$, равновесие системы не нарушится.

Обозначим ординату точки B через η_b, тогда изгибающий момент в точке B, $M_b = -P \cdot \eta_b$ и реакция от части AC_1 стойки равна $-P$. Вообразив, что в точке B приложены эта сила $-P$ и момент $-P\eta_b$, можем часть OC убрать, точно также вообразив что в точке A_1 приложена сила P можем часть стойки выше A_1 убрать и считать часть BAC_1A_1 свободной и находящейся в равновесии под действием приложенной системы сил и пары M, как это показано на фиг. 4. Очевидно, что можно всю эту фигуру, сохраняя взаимное расположение и величины сил, поворачивать как угодно в ее плоскости, повернем же ее так чтобы прямая BA_1 стала вертикальной (фиг. 4), тогда вообразив, что в точке A_1 стойка подперта и в точке B заделана по направлению BA, сложим силы P и R в точке B приложенные в одну силу N, которая будет направлена по BA, видим что кривая BC_1A_1 представляет



Фиг. 4.

форму равновесия стойки подпертой в точке A и заделанной в точке B, под действием силы N, направленной по прямой BA.

Совершенно так же увидим, что кривая $OCAB_1$, где B_1 есть точка касания касательной проведенной через O, есть форма равновесия стойки заделанной в B_1 и подпертой в точке O.

Длина l_1 стойки в этом случае есть $OBAB_1 = BC_1A_1 = \frac{3}{2}l - CB = l_1$, эта длина *графически* определяется просто и с достаточною точностью, аналитически же требует решения сложных трансцендентных уравнений.

Эйлерова нагрузка в этом случае определяется формулою

$$(*) \qquad P_e = \frac{\gamma^2 . EI}{l^2},$$

где γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \mu$$

этот наименьший корень есть

$$\gamma = 4.4934.$$

Заметив, что

$$\gamma^2 = (4.49)^2 = 20.19$$

$$2\pi^2 = 19.75$$

вместо форм, (*) по аналогии с прочими берут

$$P_e = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

таким образом для этого случая должно иметь место равенство

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

из которого следует

$$l_1 = \sqrt{2}l = 1.414\, l$$

значит

$$CB = (1.500 - 1.414)\, l = 0.086\, l$$

или более точно

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\gamma^2 . EI}{l_1^2},$$

откуда

$$l_1 = \frac{\gamma}{\pi} l = 1.4303\, l$$

и

$$l = 0.6991 \simeq 0.7\, l,$$

т. е.

$$CB = (1.5000 - 1.4303)\, l = 0.0697\, l$$

или кругло

$$CB = 0.07\, l.$$

Сопоставляя полученные результаты имеем следующую табличку соотношений между длиною стойки l_1 и длиною l стойки, оба конца которой подперты, и по форме которой сейчас же вычерчивается и форма равновесия стойки l_1 под действием заданной нагрузки.

1) Оба конца подпертые: $l = l_1$.

2) Один конец свободен другой заделан: $l = 2l_1$.

2а) Один конец свободен другой заделан, форма равновесия с точкою перегиба: $l = \frac{2}{3} l_1$.

3) Оба конца заделаны $l = \frac{1}{2} l_1$.

4) Один конец заделан другой подперт $l = 0.7\, l$.

Определив таким образом длину l, вычисляем по заданной нагрузке P величину a по формуле

$$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

если окажется, что

$$a < \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.2214\right),$$

то существует только прямолинейная форма равновесия.

Если окажется

$$2\frac{\pi}{\sqrt{2}} > a > \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

то прямолинейная форма равновесия *неустойчива*, и кроме нее существует *одна* криволинейная форма равновесия, вид и вычерчивание которой и показаны выше.

Если бы оказалось

$$a > \frac{2\pi}{\sqrt{2}},$$

то кроме упомянутой криволинейной формы существуют другие формы равновесия, о которых мы ниже скажем лишь несколько слов, ибо эти формы технического значения не имеют.

Определение этих форм может быть выполнено подобно изложенному не пользуясь эллиптическими функциями, а лишь простейшими эллиптическими интегралами.

§ 7. Разберем несколько подробнее «основную» форму равновесия при условии

$$a > \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

предполагая, что a изменяется от величины весьма мало превышающей его низший предел и возрастает неопределенно.

Уравнения (I) упругой линии

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} K &= \frac{a}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{k}{K}\cos\varphi \\ z &= \frac{1}{2K}\left[(2E-K)-\left(2E(\varphi)-F(\varphi)\right)\right] \end{aligned}$$

ввиду того, что постоянные

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

суть функции модуля k, представляют семейство кривых зависящих от одного параметра, за который можно принять k или a. Проще проследить за последовательной изменяемостью формы этих кривых задавая модуль k или, точнее говоря, модулярный угол θ, а не величины a, ибо в таблицах функций $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ эти функции даны с аргументами θ и φ

через 1° у Лежандра, в сокращенном же извлечении L. Levy углы θ даются через 5°, углы φ через 1°.

Мы будем пользоваться сокращенными таблицами и возьмем следующие значения угла θ:

$$5^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 89^\circ 54'$$

последнее число потому, что оно есть наибольшее в таблицах L. Levy.

Углы φ берем

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$$

и для последней кривой еще $\varphi = 87^\circ$, чтобы иметь для более точного ее очертания еще одну точку там, где эта точка нужна.

Вычисления, само собою разумеется, производимые логарифмической линейкой располагаются как показано в следующих таблицах.

В этих таблицах вычисление всей серии восьми кривых по шесть точек на каждой половине кривой приведено полностью в том виде, как оно сделано для вычерчивания этих кривых, причем ни одной цифры не писалось где-либо особо.

1) ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

θ	K	a	a^2	$P:P_e=n$	$k=\sin\theta$	$y_c=\frac{k}{K}$	τ_0
5°	1.5738	2.228	4.964	1.0059	0.0872	0.0554	10°
15	1.5981	2.25	5.06	1.023	0.2588	0.162	30
45	1.8541	2.62	6.86	1.39	0.7071	0.332	90
65	2.309	3.27	10.69	2.17	0.9063	0.392	130
75	2.768	3.91	15.29	3.20	0.9659	0.349	150
80	3.153	4.44	19.71	3.90	0.9848	0.312	160
85	3.832	5.38	28.94	5.88	0.9962	0.260	170
89°54′	7.737	10.40	108.2	21.90	1.0000	0.128	179°48′

2) $E(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.5236	0.5232	0.5212	0.5188	0.5180	0.5178	0.5176	1.5176
30	1.0468	1.0442	1.0282	1.0088	1.0034	1.0014	1.0004	1.0000
45	1.5697	1.5612	1.5098	1.4446	1.4258	1.4194	1.4156	1.4142
60	2.0921	2.0736	1.9300	1.8084	1.7616	1.7456	1.7354	1.7320
75	2.6140	2.5822	2.3270	2.0954	1.9984	1.9628	1.9398	1.9318
90	3.1356	3.0883	2.7013	2.3277	2.1528	2.0802	2.0253	2.0000

3) $F(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.2618	0.2620	0.2633	0.2643	0.2646	0.2648	0.2648	0.2648
30	0.5238	0.5251	0.5356	0.5442	0.5474	0.5483	0.5491	0.5493
45	0.7859	0.7903	0.8260	0.8593	0.8727	0.8774	0.8804	0.8813
60	1.0484	1.0577	1.1424	1.2376	1.2837	1.3014	1.3129	1.3169
75	1.3110	1.3273	1.4879	1.7176	1.8715	1.9468	2.0050	2.0271
90	1.5738	1.5981	1.8541	2.3088	2.7681	3.1534	3.8317	7.7371

4) $2E(\varphi) - F(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.2618	0.2618	0.2579	0.2545	0.2544	0.2530	0.2528	0.2528
30	0.5230	0.5191	0.4926	0.4646	0.4560	0.4531	0.4513	0.4507
45	0.7838	0.7709	0.6838	0.5853	0.5531	0.5420	0.5352	0.5329
60	1,0437	1.0159	0.7876	0.5708	0.4779	0.4442	0.4225	0.4151
75	1.3030	1.2549	0.8391	0.3778	0.1269	0.0160	— 0.0652	— 0.0953
90	1.5618	1.4902	0.8472	0.0189	— 0.6153	— 1.0732	— 1.8164	— 5.5371
87	—	—	—	—	—	—	—	— 1.6453

5) $(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	1.3000	1.2284	0.5893	— 0.2356	— 0.8697	— 1.3262	— 2.0692	— 5.7899
30	1.0388	0.9711	0.3556	— 0.4457	— 1.0713	— 1.5263	— 2.2677	— 5.9878
45	0.7780	0.7193	0.1634	— 0.5664	— 1.1684	— 1.6152	— 2.3516	— 6.0700
60	0.5181	0.4743	0.0596	— 0.5519	— 1.0932	— 1.5174	— 2.2389	— 5.9522
75	0.2588	0.2353	0.0081	— 0.3589	— 0.7422	— 1.0892	— 1.7512	— 5.4418
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	— 3.8918

6) $z = \frac{1}{2K}[(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi)]$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
0°	0.500	0.463	0.224	— 0.0041	— 0.1147	— 0.1700	— 0.2372	— 0.357
15	0.416	0.381	0.156	— 0.0510	— 0.1621	— 0.2143	— 0.2700	— 0.374
30	0.333	0.304	0.094	— 0.0964	— 0.1995	— 0.2421	— 0.2960	— 0.387
45	0.249	0.225	0.0432	— 0.1225	— 0.2180	— 0.2562	— 0.3070	— 0.392
60	0.166	0.148	0.0157	— 0.1195	— 0.2040	— 0.2492	— 0.2920	— 0.384
75	0.083	0.073	0.0021	— 0.0777	— 0.1385	— 0.1727	— 0.2288	— 0.352
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	— 0.251
$2K$	3.1476	3.1962	3.7082	4.6176	5.5362	6.3068	7.6634	15.4742
$\frac{1}{2}K$	0.3201	0.3129	0.2643	0.2165	0.1865	0.1586	0.1305	0.0646

7) ВЫЧИСЛЕНИЕ $y = y_c \cos\varphi$

φ \ θ	$\cos\varphi$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
0°	1.000	0.0554	0.162	0.332	0.392	0.349	0.312	0.260	0.129
15	0.966	0.0535	0.160	0.321	0.380	0.338	0.301	0.251	0.124
30	0.866	0.0480	0.140	0.287	0.338	0.302	0.270	0.225	0.122
45	0.707	0.0395	0.114	0.235	0.277	0.247	0.221	0.183	0.091
60	0.500	0.0277	0.081	0.166	0.196	0.175	0.156	0.130	0.065
75	0.259	0.0144	0.042	0.086	0.102	0.090	0.081	0.067	0.033
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Отсюда простота вычисления по нашим формулам, которые непосредственно следуют из формул данных Лагранжем 160 лет тому назад, ясна сама собою, между тем если обратиться к сочинениям по теории эллиптических функций, то напр. в книге P. Appell et E. Lacour мы на стр. 270, снимок которой прилагается (фиг. 5), находим формулы, по которым определяются координаты x (наше z) и y упругой линии, при этом в этих формулах наша величина $2a^2$ заменена величиною, $\frac{2C}{a^2}$, и вместо нашей буквы τ написано θ. Величины $p(u)$ и $\zeta(u)$ суть эллиптические функции Вейерштраса. Необходимо однако заметить, что для этих функций таблиц нет, да и составить их, например, для функции $p(u)$ невозможно, ибо функция эта зависит еще от двух величин, так что таблица потребовалась бы трехвходная, поэтому при численных вычислениях надо обращаться к таблицам Лежандра, а для этого надо применять последовательно целый ряд формул, показанных на стр. 100—104 книги L. Levy.

Отсюда очевидно, что вычисление по этим формулам координат только *одной* точки потребовало бы во много раз больше работы нежели приведенное нами вычисление всей серии восьми типичных кривых по шесть точек на каждой, понятно почему решение подобное приводимым в руководствах по теории эллиптических функций отпугивает техника и инженера от столь простого по существу вопроса, но это не может быть поставлено в упрек названным авторам, ибо они решали не технический вопрос, а имели в виду дать упражнение в применении излагаемых ими теорий.

TABLEAU DE FORMULES. (*Courbe élastique plane et sans pression.*)

(1) $$\frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

(2) $$\frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D,$$

(3) $$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2,$$

(4) $$\frac{y}{a} = -\frac{i}{2}\frac{p'u}{pu - e_2},$$

(5) $$(pu - e_2)[p(u + \omega_2) - e_2] = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2),$$

(6) $$(pu - e_2) + [p(u + \omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2,$$

(7) $$\left(\frac{y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = [p(u + \omega_2) - pu]^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

(8) $$\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{D}{C}\right)^2 - \frac{1}{C^2} = -\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

(9) $$a\,du = Ci\,ds,$$

(10) et (11) $$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 = pu + p(u + \omega_2) - 2e_2,$$

(12) $$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u + \omega_2) + 2ue_2] + \text{const.},$$

(13) $$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

(14) $$a\,dt = C\,ds,$$

(15) $$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2t,$$

(16) $$\frac{y}{a} = -\frac{i}{2}\frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\omega_2},$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{1}{2}\frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{p(it) - p\frac{\omega_2}{2}}.$$

Фиг. 5.

§ **8.** По вычисленным координатам построены показанные на табл. 1 и II кривые представляющие формы упругого равновесия по мере возрастания нагрузки. Само собою разумеется, что лишь первые типы относятся к стойкам, дальнейшие типы представляют формы равновесия упругой проволоки, последовательность их ясно видна начиная от слегка изогнутой и кончая фиг. 9 при бесконечно большой нагрузке, когда проволока удерживаемая в точке O и нагруженная в точке A приняла опять прямолинейную форму, но с «колышкою» в точке C.

Нагрузки, которым соответствуют показанные на таблицах формы равновесия, приведены в таблице основных величин послуживших для вычисления этих форм. Для ясности приводим их здесь:

№ формы равновесия	Нагрузки $P:P_e=n$	№ формы равновесия	Нагрузки $P:P_e=n$
1	1,0059	6	3,90
2	1,023	7	5,88
3	1,39	8	21,90
4	2,17	9	∞
5	3,20		

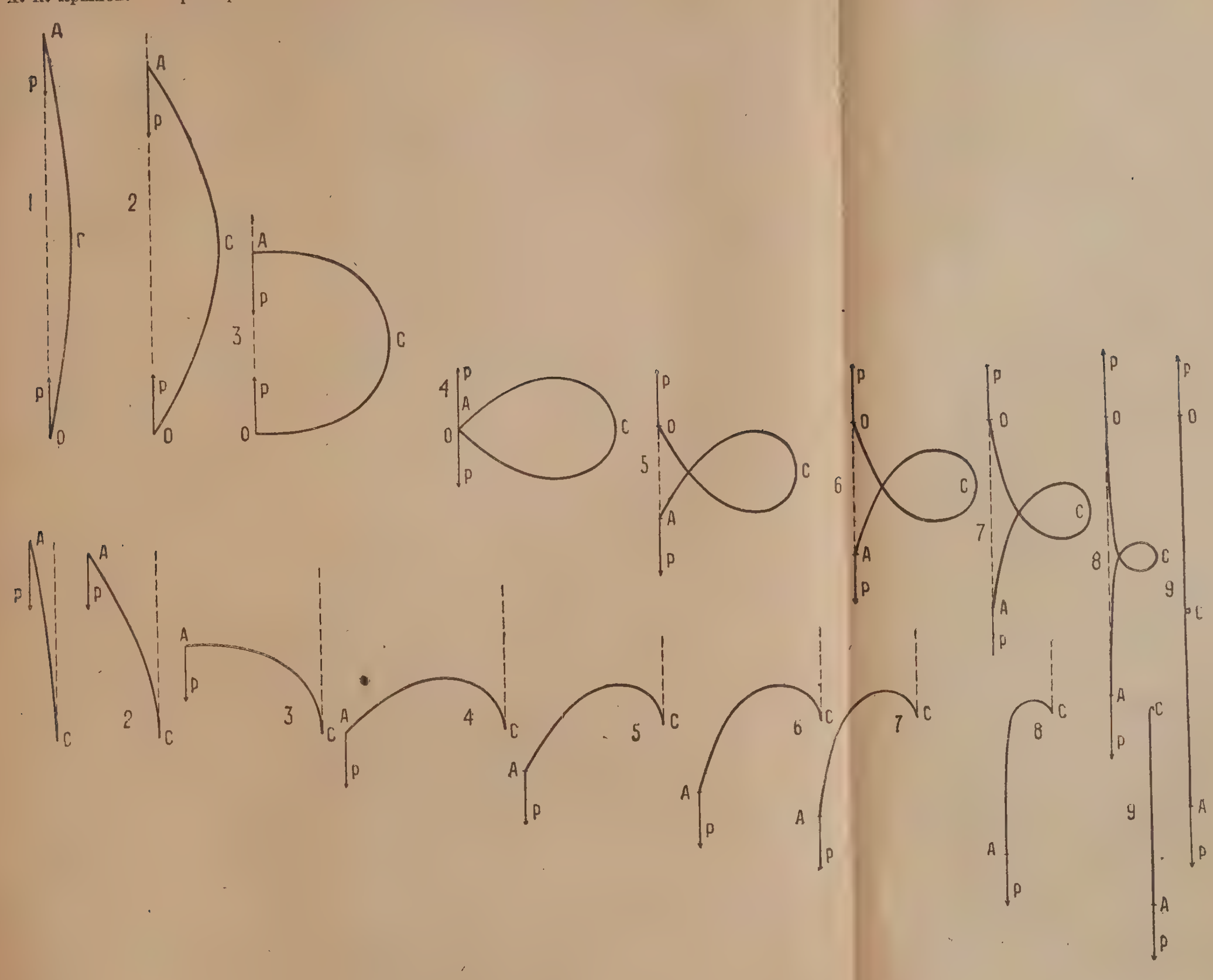
Вычерчивание этих фигур выполняется очень просто, изготовив сперва картонные шаблоны представляющие половину OC каждой кривой.

Пользуясь теми же шаблонами вычерчены серии форм равновесия для стойки заделанной в одном конце свободной в другом, который нагружен, а затем серия (табл. 2), для случая, когда оба конца заделаны.

Заметим, что форма соответствующая значению модулярного угла $\theta = 65°$ почти замкнутая и напоминает лемнискату. Кривая смыкается при таком значении θ, при котором $2E = K$, т. е. при $\theta = 65°22{,}5'$ чему соответствует $\tau_0 = 130°45'$, для лемнискаты же этот угол равен $135°$.

Совершенно также взяв с таблицы 1 части кривых CAC_1A_1 получим формы равновесия стойки заделанной в точке C, нагруженной в точке A_1 и имеющей точку перегиба в точке A. Вычерчивание их очевидно и производить его нет надобности.

Наконец, проводя из точки O касательную OB получаем формы равновесия стойки подпертой в точке O и заделанной по направлению OB в точке B.



По поводу этих последних форм необходимо сделать следующее замечание: уже было упомянуто, что Эйлерова нагрузка выражается в этом случае формулою

$$P_e = \gamma^2 \frac{EI}{l^2}$$

причем γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \mu.$$

По симметрии и способу построения кривой фиг. 4 видно, что отложив длину $CB' = CB$ мы получим точку B' соответствующую значению $\varphi = \omega$, причем ω небольшой угол; пусть τ есть уклон касательной в этой точке, тогда как мы видели

$$\sin\frac{\tau}{2} = k\sin\omega$$

$$\cos\frac{\tau}{2} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}$$

$$\sin\tau = 2k\sin\omega\,.\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}$$

$$\cos\tau = 1 - 2k^2\sin^2\varphi.$$

Координаты точки B суть:

$$z_b = 2z_c + OD' = 2z_c + \frac{1}{2K}[2E - K - (2E(\omega) - F(\omega))] =$$

$$= 3z_c - [2E(\omega) - F(\omega)]$$

$$y_b = -D'B' = -\frac{k}{K}\cos\omega.$$

Уравнение касательной в точке B' есть

$$(Y - y_b)\cos\tau + (Z - z_b)\sin\tau = 0.$$

Чтобы эта касательная проходила через точку O необходимо условие

$$y_b\cos\tau + z_b\sin\tau = 0$$

Это условие распадается на два

1) $$k = 0$$

2) $$\cos\omega(1 - 2k^2\sin^2\omega) +$$
$$+ 3(2E - K) - (2E(\omega) - F(\omega))\sin\omega \,.\, \sqrt{1 - k^2\sin^2\omega} = 0 \qquad (*)$$

Первое имеет место, если левая часть уравнения (*) не может равняться нулю, и соответствует прямолинейной форме равновесия.

Положим

$$\omega = \frac{3\pi}{2} - \mu$$

тогда будет:

$$E(\omega) = E\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3E - E(\mu)$$

$$F(\omega) = F\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3F - F(\mu)$$

и предыдущее уравнение примет вид:

(17) $$\sin\mu(1 - 2k^2\cos^2\mu) - (2E(\mu) - F(\mu))\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} = 0.$$

Мы получим ближайшую к прямолинейной форму равновесия при весьма малых значениях k, тогда отбрасывая члены с множителем k^2 будем иметь

$$E(\mu) = \mu, \quad F(\mu) = \mu$$

и наше уравнение примет вид

$$\sin\mu - \mu\cos\mu = 0,$$

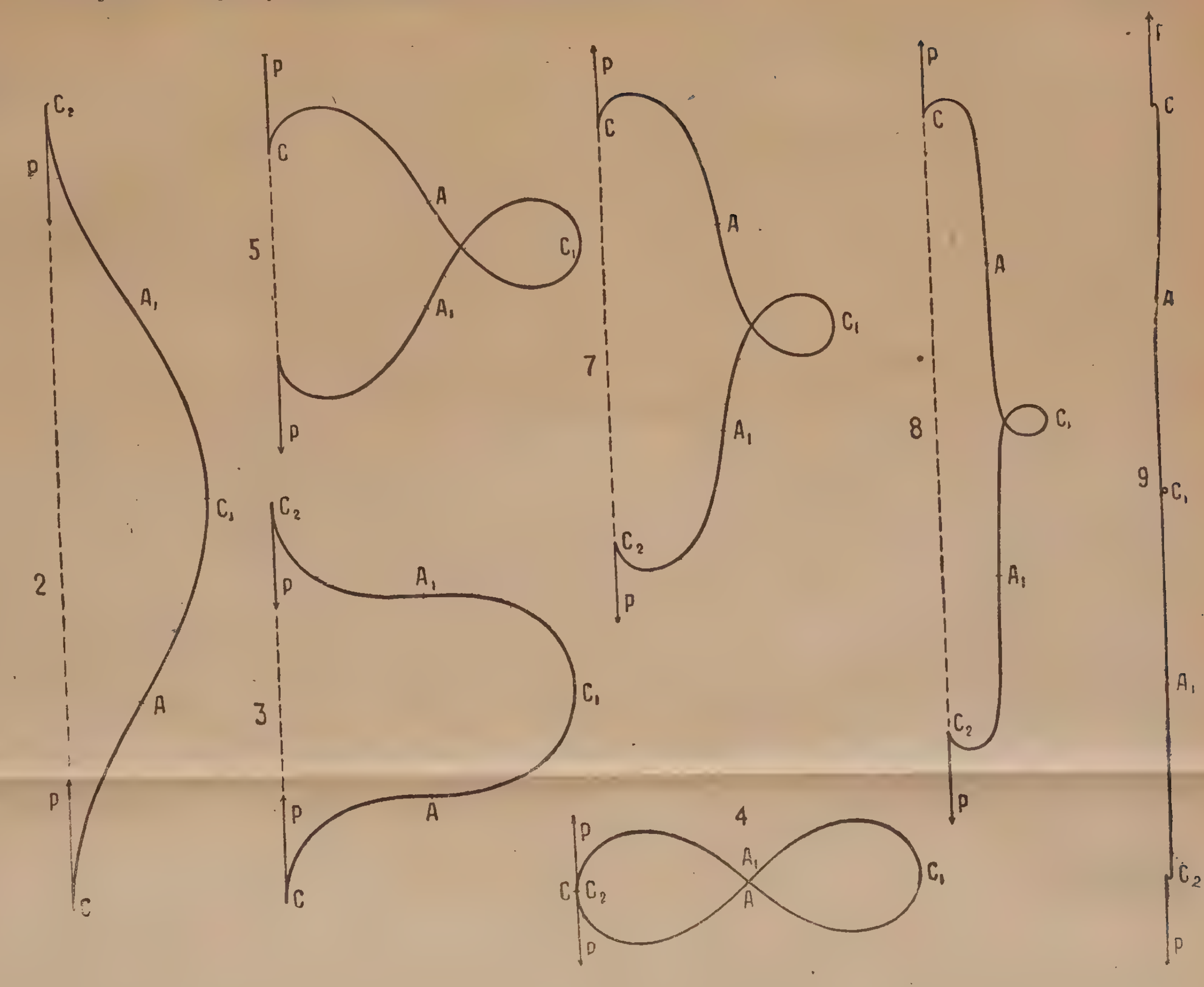
т. е.

$$\operatorname{tg}\mu = \mu$$

— это и есть уравнение Эйлера для этого случая закрепления концов стойки, и форм весьма близких к прямолинейной.

Если же модуль k значительный, то величина μ определяется уравнением (17), вычисление наименьшего корня этого уравнения, найдя сперва графически приближенное его значение по построению точки B и измерению длины $C_1B = CB' = s$, не представит затруднений.

Таблица 2



ИМЕН, 1931

В самом деле для точки B' имеем на основании ур. (9) равенство

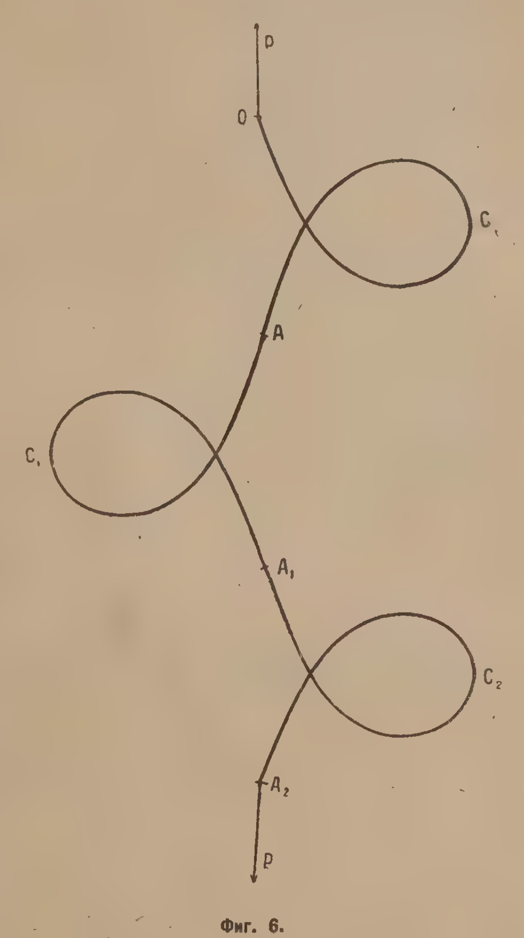
$$2K\left(\frac{1}{2}-s_1\right)=K+F(\omega) \tag{18}$$

иначе

$$2Ks_1=F(\omega), \tag{18'}$$

отсюда найдем приближенное значение ω и по нему приближенное значение μ, после чего более точное легко находится как обыкновенно, последовательными линейными приближениями.

Разбирать формы равновесия, которые получаются кроме изображенных мы не будем, ибо они представляют лишь соединения двух, трех... форм уже начерченных, взяв их в половинном, третном и т. д. масштабе, причем это соединение всегда надо делать в точках перегиба. Так например (фиг. 5 табл. 1), будучи повторена трижды, дает форму представленную на фиг. 6, и относится к стойке длиною $3l$ при нагрузке $3.20\,Pe$, указанной выше.



Фиг. 6.

Все эти формы, возможные для упругой проволоки, не имеют технического значения, упомянуты же здесь, чтобы показать насколько просто решается задача об упругой линии не прибегая к эллиптическим функциям, а пользуясь лишь эллиптическими интегралами и готовыми для них таблицами Лежандра.

§ **9.** Вопросы о том, как отражается на формах равновесия стойки ее начальная кривизна, сохраняются ли тогда условия Эйлера и какой смысл тогда надо им придавать, представляют некоторый интерес для техники. Изложение этих вопросов в обычных курсах является часто недостаточным.

Начнем с простейшего случая, когда начальная кривизна стойки «малая», постоянная, и нагрузка такова, что стойка и после деформации имеет «малую» кривизну.

К этому случаю относится упрощенная теория Эйлера.

Упрощение в этой теории состоит как известно в том, что наклон касательной к оси $O\zeta$ считается настолько малым, что *квадратом* его можно пренебречь по сравнению с 1 при той степени точности, с которою ведется расчет. Так например, если наибольший уклон касательной не более 1° то $\operatorname{tg} 1^\circ = 0.0175$, $\operatorname{tg}^2 1^\circ = 0.000\,306 = \frac{1}{3270}$, ясно что практически ни нагрузка, ни момент инерции I, ни модуль упругости E с такою точностью известны не будут и квадратом уклона в 1° можно пренебречь. Таким образом, когда расчет сделан при предположениях Эйлера, надо расчитать уклон, чтобы иметь суждение об относительной точности этого расчета.

В том случае, когда квадратом уклона можно пренебречь, то будет

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = 1.$$

Значит за переменную независимую можно вместо σ принять ζ и вместо s принять z и полагать

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$$

и

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dz^2} = y''$$

и уравнение равновесия принимает упрощенную форму

$$EI\eta'' = M$$

или

$$EIy'' = Ml.$$

Итак положим, что имеем стойку, оба конца которой подперты, и начальная форма которой есть AC_0A, представляющая дугу круга радиуса ρ_0 со стрелкою $D_0C_0 = f_0$ и длиною $OC_0A = OA = l$ (фиг. 7).

Уравнение равновесия этой стойки будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = P\eta,$$

но в данном случае при указанном расположении осей

$$\frac{1}{\rho} = -\eta''; \quad \frac{1}{\rho_0} = -\eta_0'',$$

причем ρ и ρ_0 считаются величинами представляющими некоторые длины, значит существенно положительными. Таким образом, будет

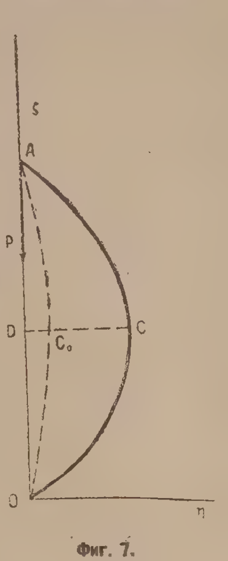
$$EI(\eta'' - \eta_0'') = -P\eta$$

иначе

$$y'' + n^2 y = -c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

причем положено

$$n^2 = \frac{Pl}{EI}, \qquad y_0'' = -c$$



Фиг. 7.

Общий интеграл этого уравнения есть

$$y = A\cos nz + B\sin nz - \frac{c}{n^2}.$$

Граничные условия суть:

при $z = 0$ должно быть: $\quad y_0 = 0 = A - \frac{c}{n^2}$

при $z = 1$ должно быть: $\quad y_1 = 0 = A\cos n + B\sin n - \frac{c}{n^2}.$

Откуда следует

$$A = \frac{c}{n^2}; \quad B = \frac{c}{n^2}\operatorname{tg}\frac{n}{2}$$

(19') $$y = \frac{c}{n^2}\left[\frac{\cos n\left(\frac{1}{2} - z\right)}{\cos\frac{n}{2}} - 1\right].$$

Между начальным радиусом кривизны ρ_0 и стрелкою f_0 имеем соотношение

$$\frac{l^2}{4} = f_0(2\rho_0 - f_0)$$

откуда следует приближенно

$$\rho_0 = \frac{l^2}{8f_0},$$

следовательно:

$$r_0 = \frac{l}{8f_0}, \quad c = \frac{8f_0}{l},$$

значит будет

$$\eta = \frac{8f_0}{n^2}\left[\frac{\cos n\left(\frac{1}{2} - z\right)}{\cos\frac{n}{2}} - 1\right]$$

и наибольший прогиб и наибольший уклон

(20)
$$\eta_{\max} = \frac{8f_0}{n^2}\left(\sec\frac{n}{2} - 1\right) = f \cdot l$$
$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\max} = \frac{8f_0}{nl}\cdot \operatorname{tg}\frac{n}{2}\cdot \quad = \gamma$$

Чтобы получить ясное представление, в каких пределах применимы эти формулы проследим за изменяемостью множителей

(21)
$$\alpha = \frac{8}{n^2}\left(\sec\frac{n}{2} - 1\right) \text{ и } \frac{8}{n}\operatorname{tg}\frac{n}{2} = \beta$$

при изменяемости n, получим следующую таблицу:

1	2	3	4	5	6
$\frac{n^\circ}{2}$	$\frac{P}{P_e} = \frac{n^2}{\pi^2}$	α	β	$f = \alpha\frac{f_0}{l}$	$\gamma = \beta\cdot\frac{f_0}{l}$
30°	0.111	1.13	4.40	1 : 530	1 : 136
60	0.445	1.66	6.62	361	91
75	0.694	3.35	11.40	179	53
80	0.790	4.89	19.20	122	31
85	0.894	9.53	30.80	63	19.5
87°5	0.935	18.85	57.80	32	10.4

В двух последних столбцах этой таблицы показаны: в ст. 5 отношение стрелки прогиба к пролету, когда начальное значение этого отношения есть $\frac{1}{600}$, в ст. 6 величина наибольшего уклона, в ст. 2 показано отношение действующей нагрузки P к Эйлеровой, в столбце 3 — отношение наибольшей стрелки прогиба к начальной. Это последнее отношение от величины начальной стрелки прогиба не зависит.

Числа α приведенные в этой таблице, особенно если их представить графически в зависимости от нагрузки, ясно показывают насколько быстро начинает возрастать прогиб, когда нагрузка превзойдет примерно 0.8 Эйлеровой, последний же столбец показывает что y'^2 не превышает в этом случае $\frac{1}{1000}$, значит упрощенным уравнением можно вполне пользоваться, если же нагрузка не превышает 0.5 Эйлеровой, то прогиб не превышает удвоенного начального прогиба.

Было бы однако неправильно заключить, что когда нагрузка равна Эйлеровой, то прогиб бесконечный, ибо тогда самое уравнение (19) неприменимо, и расчет для этого случая надо бы производить по полному уравнению.

Мы не будем останавливаться на других случаях закрепления концов, так как сущность дела достаточно выяснена на разобранном простейшем случае.

§ 10. Полное уравнение в нашем случае будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=P\eta,$$

причем при сделанном расположении осей надо писать

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{d^2\eta\, d\zeta-d^2\zeta\, d\eta}{d\sigma^3},$$

или вводя как и раньше переменные: z, y, s, r и положив

$$2a^2=\frac{Pl^2}{EI},\qquad \frac{1}{2a^2 r_0}=-c$$

получим

$$y''z'-z''y'=-2a^2(y+c),$$

откуда подобно предыдущему получим

$$z'' = 2a^2 (y + c) y'$$

$$z' = h + a^2 (y + c)^2.$$

Постоянная произвольная h определяется по условию

$$h = \cos\tau_0 - a^2 c^2,$$

где через τ_0 обозначено наклонение касательной в точке для которой $y = 0$ и $s = 0$.

Затем по прежнему имеем

$$y' = \sqrt{[1 - h - a^2 (y + c)^2] . [1 + h + a^2 (y + c)^2]} \tag{22}$$

причем:

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - h &= 1 - \cos\tau_0 + a^2 c^2 \\ 1 + h &= 1 + \cos\tau_0 - a^2 c^2. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Отсюда видно, что всегда будет

$$1 - h > 0,$$

но величина $1 + h$ может быть как положительной так и отрицательной, эти два случая требуют отдельного рассмотрения.

I случай.

$$1 + h > 0.$$

В этом случае полагаем

$$1 - h = f^2$$

$$1 + h = g^2,$$

так что будет

$$y' = \sqrt{[g^2 + a^2 (y + c)^2] . [f^2 - a^2 (y + c)^2]}.$$

Полагаем

$$a (y + c) = -f \cos\varphi,$$

тогда будет

$$a\,dy = f \sin\varphi \,.\, d\varphi$$

$$a\sqrt{2}\,s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi) - F(\varphi_0)$$

$$k^2 = \frac{f^2}{2},$$

угол φ_0 определяется равенством

(24) $$\cos\varphi_0 = -\frac{ac}{f}$$

угол же φ возрастает от значения φ_0 до значения $\varphi = \pi$ при $s = \frac{1}{2}$, таким образом будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F(\pi) - F(\varphi_0) = 2K - F(\varphi_0).$$

Положим

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

тогда для определения ω имеем уравнение

(25) $$\sin\omega = \frac{ac}{f} = \frac{ac}{k\sqrt{2}}$$

вместе с тем будет:

$$F(\varphi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}+\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

положив в этом интеграле

$$\pi - \varphi = \psi,$$

получим

$$F(\varphi_0) = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\omega} = 2K - F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$$

и следовательно будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right). \tag{26}$$

При данных: нагрузке, размерах и начальной кривизне балки величины

$$a = \sqrt{\frac{P}{2EI}} \cdot l$$

и

$$c = \left|\frac{1}{2a^2 r}\right|$$

известны, — уравнения (25) и (26) послужат для определения неизвестных k и φ_0 и тогда по равенству

$$f = k\sqrt{2}$$

найдем наибольший прогиб

$$\eta_{\max} = l\left[\frac{f}{a} - c\right]. \tag{27}$$

Величина z найдется по уравнению

$$z' = h + a^2(y + c)^2$$

совершенно подобно тому как в § 3, на чем останавливаться не будем.

По таблицам значений функции $F(\varphi)$ нахождение значений k и ω затруднений не представляет.

II случай.

$$1 + h < 0.$$

В этом случае полагаем

$$1 - h = f^2$$

$$1 + h = -g^2,$$

так что будет

$$y' = \sqrt{[a^2(y + c)^2 - g^2] \cdot [f^2 - a^2(y + c)^2]}$$

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{[a^2(y + c)^2 - g^2] \cdot [f^2 - a^2(y + c)^2]}}.$$

Для приведения интеграла правой части к каноническому виду надо положить

$$a(c+y)=\frac{g}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$k^2=\frac{f^2-g^2}{f^2}=\frac{2}{f^2}$$

и получится:

$$as\sqrt{2}=k\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=k\Big[F(\varphi)-F(\varphi_0)\Big]$$

причем угол φ_0 определяется уравнением

(28′) $$a^2c^2(1-k^2\sin^2\varphi)=g^2=f^2-2=\frac{2(1-k^2)}{k^2}$$

к этому уравнению надо еще присоединить следующее

(29) $$\frac{a}{\sqrt{2}}=k[K-F(\varphi_0)],$$

которое получается из (28) положив в нем $s=\frac{1}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Уравнения (28′) и (29) послужат для определения величин k и φ_0, после чего наибольший прогиб $\eta_{\max}$ найдется из равенства

(30) $$\eta_{\max}=l\Big[\frac{f}{a}-c\Big]$$

совершенно того же вида как и в первом случае.

Мы не будем выводить формул для вычисления координаты ζ, так как этот вывод не отличается существенно от изложенного в § 3, а вычислим для ясности значения прогибов по форм. (27), чтобы иметь наглядное представление о том, в какой мере точны результаты даваемые упрощенной теорией Эйлера.

Для этого вычисления мы имеем следующие формулы:

(1) $$n^2=2a^2=\frac{Pl^2}{EI};\quad c=\left|\frac{1}{2a^2r_0}\right|;\quad \frac{1}{r_0}=\frac{8f_0}{l}$$

(2) $$k^2=\frac{f^2}{2};\quad k=\frac{f}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\omega = \frac{ac}{f} = \frac{ac}{k\sqrt{2}} \tag{3}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{4}$$

$$\eta_{\max} = l\left[\frac{f}{a} - c\right] = lc\,[\operatorname{cosec}\omega - 1]. \tag{5}$$

В том случае, когда кривизна стойки, а значит, и прогиб малые, то модуль k будет малый и если пренебрегать квадратом его величины, то будет

$$F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{\pi}{2} - \omega = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{n}{2}$$

и

$$\eta_{\max} = \frac{8f_0}{n^2}\left[\sec\frac{n}{2} - 1\right]$$

т. е. получается формула (20) Эйлера, так что числа приведенной выше таблицы поправки не требуют.

При $n^2 = \pi^2$ формула (20) явно не применима и если бы расчитать $\eta_{\max}$ по этой формуле, то получили бы $\eta_{\max} = \infty$, поэтому в этом случае расчет надо делать по точным формулам.

Очевидно будет

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \approx K - \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}}$$

ибо величины ω и k малые.

Но мы имели

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \cdots\right]$$

$$\sin\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{k},$$

значит

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{c}{k} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\frac{c}{k}\right)^3 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{c}{k} + 0.41\left(\frac{c}{k}\right)^3\right].$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right] - \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{k} + 0.41\left(\frac{c}{k}\right)\right)^3\left(1 + \frac{1}{2}k^2\right),$$

т. е.

$$0 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 - \frac{c}{k} - \frac{1}{2}ck.$$

В первом приближении будет

$$k_1^3 = 4c$$

второе приближение будет

$$k = k_1\left(1 - \frac{1}{48}k_1^2\right).$$

В нашем примере

$$c = \frac{1}{75}\cdot\frac{1}{\pi^2} = 0.00135095; \quad \log c = \bar{3}.130\,639$$

$$k_1 = 0.175\,482, \qquad \log k_1 = \bar{1}.244\,233$$

$$1\frac{1}{48}k_1^2 = 0.999\,358 \quad \log\left(1 - \frac{1}{48}k_1^2\right) = \bar{1}.999\,721$$

$$\log k = \bar{1}.243\,954 = \log\sin\theta$$

$$\theta = 10^\circ 6' 0''.5.$$

Затем имеем $\sin\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{k}$ поэтому будет

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{k}\cdot\sec\theta = \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\log\frac{\pi}{2} = 0.196\,120$$

$$\log c = \bar{3}.130\,639$$

$$\text{colg}\,k = 0.756\,046$$

$$\log\sec\theta = 0.006\,783$$

$$\bar{2}.089\,588 \qquad \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 0.01229 = 0^\circ 42' 15''$$

Во втором томе упомянутого сочинения Лежандра помещены 12-тизначные таблицы логарифмов величин K и E для всех модулярных углов θ через $0^\circ 1'$, в этой таблице находим для $\theta = 10^\circ 6'$, взяв первые 6 знаков

$$\log K = 0.199505$$

$$K = 1.58309$$

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 0.01229$$

$$K - \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 1.57080 \quad = \frac{\pi}{2},$$

следовательно найденные значения k и ω удовлетворяют уравнениям (25) и (26).

Затем имеем:

$$\log k = \overline{1}.243954$$

$$\log \sqrt{2} = 0.150515$$

$$\log f = \overline{1}.394469$$

$$f = 0.248010$$

$$\eta_{\max} = 600 f = 148.806 f_0 \simeq 149 f_0 \approx \frac{1}{4} l.$$

Этот результат и приведенная выше таблица наглядно показывают, какое сильное влияние оказывает даже малая начальная кривизна или малая погибь стойки на ее прогиб, когда нагрузка приближается к Эйлеровой для стойки прямолинейной, вот почему и не рекомендуется превосходить половины, а в важных случаях даже одной четверти Эйлеровой нагрузки.

В рассмотренном примере предполагается, что стойка имеет весьма малую, как бы случайную кривизну, но во многих случаях пользуются криволинейными балками, напр., в судостроении палубным бимсам придается определенная погибь, или в строительном деле при сооружении разного рода арок. Но эти случаи не относятся к «продольному» изгибу, в котором предполагается, что нагрузка действует по направлению *хорды* недеформированной стойки или балки, а в случае арки или бимса нагрузка действует *перпендикулярно* хорде. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения.

§ 11. В упомянутых выше сочинениях Halphen'a и Appell'я приведено решение в эллиптических функциях Вейерштрасса и более общей задачи, когда на стойку имеющую постоянную начальную кривизну действует направленное по нормали давление.

Обозначим это давление отнесенное на погонную единицу длины через p, и положим сперва, что оба конца стойки подперты. Пусть R и S слагающие реакции в точке опоры O, S_1 боковая реакция в точке A, удерживающая эту точку на оси $O\zeta$.

Условия статического равновесия стойки суть:

$$-P+R-\int_0^l p\sin\tau\, d\sigma=0$$

$$S+S_1-\int_0^l p\cos\tau\, d\sigma=0.$$

$$S_1\zeta_1-\int_0^l p\eta\sin\tau\, d\sigma-\int_0^l p\zeta\cos\tau\, d\sigma=0,$$

но мы имеем

$$d\zeta=d\sigma.\cos\tau;\quad d\eta=d\sigma\sin\tau,$$

то будет

$$\int_0^l \sin\tau\, d\sigma=\eta_1-\eta_0=0,$$

ибо

$$\eta_1=0$$

и

$$\eta_0=0.$$

$$\int_0^l \eta\sin\tau\, d\sigma=\frac{1}{2}\eta_1^2-\frac{1}{2}\eta_0^2=0$$

$$\int_0^l \zeta\cos\tau\, d\sigma=\frac{1}{2}\zeta_1^2-\frac{1}{2}\zeta_0^2=\frac{1}{2}\zeta_1^2.$$

Таким образом предыдущие уравнения дают

$$R = P$$

(31)

$$S = S_1 = \frac{p}{2}\zeta_1.$$

Возьмем сечение в точке $N(\zeta, \eta)$, тогда изгибающий момент в этой точке будет

$$(32)\quad M = -S\zeta + R\eta + p\int_0^\sigma (\zeta - \alpha)\cos\tau\, d\sigma_1 + p\int_0^\sigma (\eta - \beta)\sin\tau\, d\sigma_1,$$

где α и β суть координаты переменной точки H лежащей между O и N соответствующей дуге $OH = \sigma$, так что

$$d\sigma . \cos\tau = d\alpha, \quad d\sigma . \sin\tau = d\beta.$$

Значит будет

$$M = R\eta - S\zeta + \frac{p}{2}(\zeta^2 + \eta^2),$$

ибо при $\sigma_1 = 0$ будет $\alpha = 0$, $\beta = 0$

» $\sigma_1 = \sigma$ » $\alpha = \zeta$, $\beta = \eta$,

так как значению $\sigma_1 = 0$ соответствует точка O, значению $\sigma_1 = \sigma$ соответствует точка N.

Уравнение равновесия будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = M,$$

причем при избранном направлении осей и счете дуги σ будет

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2\eta\, d\zeta - d^2\zeta\, d\eta}{d\sigma^3} = -\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Положим

$$\zeta = lz,\ \eta = ly,\ \rho = lq,\ \rho_0 = lq_0,\ \zeta_1 = lz_1,$$

тогда будет

$$M = Ply - \frac{pl^2}{2}z_1 z + \frac{pl^2}{2}(z^2 + y^2)$$

и пусть

$$P = m\frac{pl}{2},$$

тогда

$$M = \frac{pl^2}{2}[z^2 + y^2 + my - z_1 z] = \frac{pl^2}{2}\left[\left(z - \frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{z_1^2 + m^2}{4}\right].$$

Необходимо здесь же заметить, что хотя величина z_1 и постоянная, но *не заданная, а неизвестная,* значение которой подлежит определению. Нетрудно вперед предвидеть, что расчет возможно будет вести только последовательными приближениями, приписывая z_1 различные частные значения и таким путем определяя то из них, которое будет удовлетворять тем трансцендентным уравнениям, которые получатся для определения z_1 и других постоянных, которые войдут при решении задачи, поэтому мы будем считать, что величине z_1 приписано такое частное значение.

Положим

$$u = z - \frac{z_1}{2} = r\sin\tau; \quad v = y + \frac{m}{2} = r\cos\tau,$$

тогда будет

$$M = \frac{pl^2}{2}\left[r^2 - \frac{m^2 + z_1^2}{4}\right] \tag{33}$$

и уравнение равновесия примет вид

$$\frac{EI}{l}\left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right] = M.$$

Положим для краткости

$$\frac{pl^3}{2EI} = 2a^2, \quad \frac{m^2 + z_1^2}{4} = b_1,$$

тогда получим

$$\frac{1}{q} = 2a^2[r^2 - b_1] + \frac{1}{q_0},$$

пусть будет

$$\frac{1}{q_0} - 2a^2 b_1 = 2a^2 c,$$

тогда уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{1}{q} = 2a^2[r^2 + c]. \tag{34}$$

Дальнейшее интегрирование этого уравнения основано на следующем преобразовании данном M. Levy: имеем равенство

$$r^2\,d\tau = u\,dv - v\,du = (u\cos\tau - v\sin\tau)\,ds$$

значит

$$r^2\frac{d\tau}{ds} = u\cos\tau - v\sin\tau.$$

Отсюда следует:

$$d\left(\frac{r^2\,d\tau}{ds}\right) = -(u\sin\tau + v\cos\tau)\,d\tau = -(u\sin\tau + v\cos\tau)\frac{d\tau}{ds} = r\,dr\,.\frac{1}{q}$$

значит

$$\frac{1}{q} = \frac{d\left(r^2\frac{d\tau}{ds}\right)}{r\,dr},$$

так что уравнение (34) будет

$$d\left(r^2\frac{d\tau}{ds}\right) = 2a^2(r^2 + c)\,.\,r\,dr.$$

Откуда по интегрировании получаем:

(35) $$r^2\frac{d\tau}{ds} = h + a^2(r^2 + c)^2,$$

где h есть произвольная постоянная, которая определяется по условию, что при $s = 0$, т. е. в точке O момент $M = 0$, значит кривизна равна $\frac{1}{q_0}$; таким образом будет

$$h = \left(r^2\frac{d\tau}{ds}\right)_0 - a^2(r_0 + c)^2 = -r_0{}^2\frac{1}{q_0} - a^2(r_0{}^2 + c)^2,$$

причем

$$r_0{}^2 = \frac{z_1{}^2 + m_1{}^2}{4}.$$

Но в полярных координатах

(36) $$ds^2 = r^2\,d\tau^2 + dr^2$$

из уравнений (35) и (36) следует

$$\left(r\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{[h + a^2(r^2 + c)^2]^2}{r^2} = 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

поэтому будет

$$\left(\frac{r\,dr}{ds}\right)^2 = r^2 - [h - a^2(r^2 + c)^2]^2.$$

Положив

(37) $$r^2 + c = \lambda,$$

получим

(37′) $$\frac{1}{4}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \lambda - c - (h - a^2\lambda^2)^2.$$

Откуда следует

$$2ds = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - c - (h + a^2\lambda^2)^2}}$$

и

(37″) $$2s = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}},$$

причем

$$\lambda_0 = r_0 + c.$$

По правилам, излагаемым в курсах интегрального исчисления интеграл в ур. (37″) приведется к каноническому виду, и мы получим:

$$2s = \mu \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

где μ, k, φ_0 будут выражены через λ_0, c, h, a, т. е. в нашем предположении, когда величине z_1 приписано частное значение, это будут известные числа.

Для вершины C будет

$$z = \frac{1}{2}z_1; \quad \tau = 0;$$

обозначая ординату вершины через y_1, будем иметь

$$y_1 + \frac{m}{2} = r_1$$

соответственно чему для вершины C будет

$$\lambda = \lambda_1 = r_1^2 + c.$$

С другой стороны, для вершины C значение s есть $s = \frac{1}{2}$, поэтому будет

$$\frac{1}{2} = \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi}}, \tag{38}$$

причем φ_1 выражается через λ_1 совершенно так же как φ_0 через λ_0, так что должно бы иметь равенство

$$\frac{1}{2} - \mu [F(\varphi_1) - F(\varphi_0)] = 0, \tag{39}$$

если бы значения z_1 и y_1 были истинные.

Для дальнейшего интегрирования имеем уравнение (35), из которого следует

$$(\lambda - c) \frac{d\tau}{ds} = h + a^2 \lambda^2$$

или на основании (37'):

$$d\tau = \frac{h + a^2 \lambda^2}{2(\lambda - c)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}};$$

т. е.

$$2\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{h + a^2 \lambda^2}{\lambda - c} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}}; \tag{40}$$

В виду наличия в знаменателе множителя $\lambda - c$, интеграл в этой формуле приведется не только к эллиптическим интегралам первого и второго рода, с которыми мы имели дело выше, но и к интегралу третьего рода, который зависит от трех аргументов и для которого таблиц нет.

Интегралы третьего рода надо для численных вычислений или приводить к Якобиевым функциям Z и Θ, или же вычислять непосредственно по приближенным формулам квадратур. Упомянутое приведение довольно сложно, оно подробно изложено в руководстве H. Durège, Theorie der elliptischen Functionen.

Практически расчет проще вести по приближенным формулам квадратур, не делая никаких приведений к нормальному виду, а беря интегралы (37″) и (40) в том виде как они есть.

Этот расчет ведется тогда в следующей последовательности.

1) По заданным элементам стойки, нагрузке, начальной кривизне и нормальному давлению вычисляются постоянные a и m.

2) Задаются для пробы значения $\frac{1}{2} z_1$ и y_1 координат вершины и вычисляются величины

$$c,\ h,\ \lambda_0 \text{ и } \lambda_1.$$

3) По одной из формул квадратур, лучше всего Гаусса, взяв пять ординат, надо вычислить интегралы:

$$(41)\quad \begin{cases} H = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} - \dfrac{1}{2} \\ L = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} \dfrac{h + a^2\lambda}{\lambda - c} \cdot \dfrac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}}. \end{cases}$$

Если бы оказалось $H = 0$ и $L = 0$, то принятые значения $\frac{1}{2} z_1$ и y_1 суть истинные, если же H и L окажутся не равными нулю, то надо, сохранив значение z_1, принять другое значение y_1 и вычислить величины H и L, затем, сохранив первое значение y_1, взять другое значение z_1 и, повторив вычисление, найти соответствующие H и L и продолжая действовать таким образом применять «линейное приближение», по которому и найти те значения y_1 и z_1, при которых $H = 0$ и $L = 0$; эти значения и дадут координаты вершины.

4) В вершине угол $\tau = 0$, поэтому как только координаты вершины найдены и значит численные значения параметров входящих в интеграл (40) известны, задаем ряд последовательных равноотстоящих значений λ между λ_0 и λ_1 и по одной из формул квадратур вычисляем по ур. (40) значения угла τ, а так как форм. (37) дает и соответствующие значения r, то форма равновесия и будет определена.

Хотя такое вычисление и представляется довольно продолжительным, но оно будет во много раз проще и короче нежели по Вейерштрассовым функциям, как то изложено в руководствах Halphen'a или Appell'я. Необходимо при этом еще заметить, что там рассматривается не стойка, для которой заданы длина и условия закрепления концов, а упругая проволока, к концам которой приложены *заданные силы и пары* находящиеся в равновесии, для стойки же реакции опор и пары закрепления *неизвестны*. Таким образом, задача для проволоки становится значительно проще нежели для стойки, ибо для проволоки в интегралах (37'') и (40) *все* постоянные известны, тогда как для стойки в определении этих постоянных и заключается главная трудность.

Если методу Halphen'a применить к стойке, то для определения неизвестных постоянных параметров пришлось бы вести процесс последовательных приближений, гораздо более сложный, нежели изложенный выше.

Рассмотренная задача не имеет большого технического значения, поэтому нет надобности пояснять ее численным примером, тем более что вычисления, кроме некоторой длинноты и утомительного однообразия, затруднений не представляют.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ *

Э. А. МИЛНА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

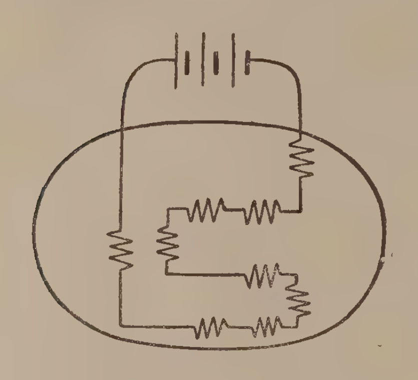
Основная задача равновесной термодинамики, решенная в 1875 г. Уиллардом Гиббсом, может быть формулирована следующим образом. Заданные количества данных химических веществ, между которыми возможны обратимые химические реакции, описываемые заданными химическими уравнениями, помещены в некоторое ограниченное пространство. При этом или стенки, ограничивающие это пространство, являются твердыми и не передающими тепла, и в этом пространстве заключено определенное заданное количество энергии, или же заданы определенные условия на поверхности, как, например, определенное давление и определенная температура. Задача такова: в каких фазах будут находиться эти вещества и какова масса в каждой фазе?

Для того чтобы решить эту задачу, нужно знать, во-первых, возможные фазы, в которых может находиться каждая химическая составная часть системы, и, во-вторых, «основные уравнения» всех возможных фаз. Если и то и другое известно, то при заданных условиях всегда возможно решить поставленную задачу.

Для изучения строения звезд необходимо поставить другую такого же рода задачу, которую мы можем назвать основной задачей равновесной термодинамики. Эту задачу можно формулировать следующим образом. Дана материальная система, состоящая из веществ заданного химического состава, между которыми могут происходить обратимые химические реакции, опи-

* Доклад, присланный в Комиссию по исследованию Солнца для конференции 25—30 апреля 1931 г.

сываемые заданными химическими уравнениями. Известны все возможные фазы, в которых могут находиться рассматриваемые вещества, но неизвестно, какие именно фазы действительно присутствуют в системе. Основные уравнения (или же уравнения состояния и химические потенциалы) даны для всех возможных фаз. В системе освобождается определенное количество энергии, а именно L эргов в секунду. Природа источников этой энергии не играет никакой роли. Так например, энергия может выделяться из реостатов, любым образом распределенных в пространстве и питаемых током от внешней батареи.



Фиг. 1. Равновесная конфигурация с источниками энергии.

В звездных условиях освобождение энергии может происходить каким-нибудь иным образом. Пространственное распределение источников L предполагается заданным, а именно дана интенсивность источников ε таким образом, что $\int \varepsilon\rho\, dv = L$. Коэффициент непрозрачности и теплопроводность также даны. Задача такова: каковы фазы, температуры и плотности в различных точках системы после того как установилось равновесное состояние.

Эту задачу всегда возможно решить экспериментальным путем. Для этого следует ввести в систему реостаты, распределение которых в пространстве задано, и включить ток. При этом система или перейдет в равновесное состояние, или же в него не перейдет. Если она не перейдет в равновесное состояние, то это значит, что она или бесконечно расширяется, или же совершает конечные либо бесконечные колебания. Если колебания являются периодическими и незатухающими, то можно получить представление о равновесном состоянии, вокруг которого эти колебания происходят. Если колебания затухают, то состояние будет стремиться к равновесному. Наличие же бесконечных колебаний или беспредельного расширения покажет, что равновесного состояния не существует.

Система, обладающая заданными математическими свойствами (заданной последовательностью возможных фаз, заданными уравнениями состояния и т. д.) может также беспредельно сжиматься. Это является не

только логической возможностью: — соответствующие примеры легко построить. Но система, реально существующая в природе, (а не математическая модель), не может сжиматься беспредельно. Поэтому система с заданными математическими свойствами, способная беспредельно сжиматься, не может изображать то, что действительно существует в природе.

Таким образом мы видим, что или абстрактная задача равновесной термодинамики о системе, состоящей из существующих в природе веществ, обладает решением, т. е. равновесной конфигурацией, или же система должна беспредельно расширяться либо совершать непрекращающиеся колебания.

Метод, который применялся прежде в космогонических исследованиях, заключался в том, что о действительных фазах такой системы составлялись гипотезы. Так например Лейн (Lane) и Эддингтон выдвинули гипотезу о том, что система состоит из одной только газовой фазы; Джинс выдвинул гипотезу, что она состоит из жидкой фазы, или же отчасти из жидкой, отчасти из газовой. Из предыдущих рассуждений видно, что этот метод, как бы он ни был важен в историческом отношении, с научной точки зрения является неправильным. Неправильно и незаконно делать гипотезу о фазе или об аггрегатном состоянии звездного вещества, как было бы неправильно сделать гипотезу о фазе или об аггрегатном состоянии заданного количества H_2O. Фаза H_2O должна сама определяться из заданных условий. Она должна быть предметом исследования, но не предметом гипотез. То же самое относится и к космогоническим вопросам. Нужно придумать метод, с помощью которого можно было бы определить действительные фазы вещества, составляющего звезду. Мы не должны строить гипотез об этих фазах, но мы должны определить, какие именно фазы в системе действительно присутствуют.

С другой стороны, мы должны обладать достаточными сведениями о потенциальных или возможных фазах этого вещества. Если наши сведения недостаточны для того, чтобы перечислить все возможные фазы вещества и все термодинамические свойства всех возможных фаз, то нам нужно прибегнуть к гипотезам о возможных фазах, т. е. нужно постулировать, что такие-то и такие-то фазы являются возможными фазами рассматриваемого вещества, но не нужно строить гипотезу, что эти фазы будут действительно присутствовать в системе. Вопрос о том, какие именно фазы будут присутствовать в системе M с заданной отдачей энергии L и с заданным распре-

делением источников, а также с заданной непрозрачностью и теплопроводностью, должен быть предметом исследования с точки зрения тех сведений о возможных фазах вещества, которыми мы располагаем. Необходимо отличать потенциальные или дозволенные фазы от действительно существующих.

Таким образом открывается огромное поле для исследования. Мы должны попытаться, во-первых, придумать общий метод решения задачи, во-вторых, отыскать общие свойства равновесных состояний, которые при этом получаются.

Метод решения. Если равновесное состояние существует при заданной массе M, заданном L, заданном распределении источников и заданных «пропускных» способностях (непрозрачность, теплопроводность), то в равновесном состоянии с поверхности системы обязательно течет поток энергии L. Если вращения нет, то тяготение приведет к тому, что конфигурация будет обладать сферической симметрией. Поэтому излучается энергия в количестве L в секунду, причем она равномерно распределяется по поверхности. Если дробь $\frac{L}{4\pi r_0^2}$ достаточно велика, (r_0 обозначает радиус), то фаза внешнего слоя, как легко видеть, будет газовой. В случае отсутствия теплопроводности * равновесная температура T_0 на поверхности определяется формулой Бронштейна-Гопфа

$$T_0^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} T_e^4,$$

где

$$L = \pi a c r_0^2 T_e^4.$$

Таким образом T_0 определяется в зависимости от r_0. Мы знаем зависящую от r_0 температуру поверхности и давление на ней (равное нулю), а также фазу (агрегатное состояние). Поэтому задача приводится к такой: каким образом меняется фаза (агрегатное состояние), а также температура и давление, когда мы идем от поверхности внутрь? Из давления p и температуры T мы можем посредством уравнения состояния фазы определить значение плотности ρ.

* Всякие другие условия на поверхности приведут к определенной формуле, позволяющей выразить T_0 через L и r_0.

В принципе эта задача разрешается следующим образом. Выберем сперва правильное значение r_0*. Выведем значение T_0. Уравнение механического равновесия позволяет вычислить градиент давления $\frac{dp}{dr}$, а уравнение переноса энергии дает градиент температуры $\frac{dT}{dr}$; и тот и другой градиенты определяются через плотность ρ, которую можно вычислить из p, T и из уравнения состояния газовой фазы, а также через остающуюся массу $M(r)$, через остающуюся мощность энергии $L(r)$, через непрозрачность или теплопроводность газовой фазы при p и T и через универсальные физические постоянные. Интегрируя эти уравнения внутрь при начальных условиях.

$$p_0 = p(r_0) = 0, \quad T_0 = T(r_0) = \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L}{\pi a c r_0^2}\right]^{\frac{1}{4}},$$

с помощью условия $M(r_0) = M, L(r_0) = L$ мы можем определить ход давления и температуры с глубиной. Для каждого элементарного слоя dr мы уменьшаем $M(r)$ на $4\pi\rho r^2 dr$ и $L(r)$ на $4\pi\rho\varepsilon r^2 dr$. Мы продолжаем двигаться внутрь, оставляя позади слой за слоем и вычисляя каждый раз $M(r)$ и $L(r)$. $M(r)$ и $L(r)$ являются убывающими функциями от r. Поведение функции $L(r)$ определяется заданным распределением источников. Единственной особенной точкой уравнения является $r = 0$. Поведение функции $M(r)$ определяет возможность конфигурации с произвольным радиусом r_0. Следующая схема позволяет исчерпать возможные случаи поведения функции $M(r)$ для произвольного значения r_0 и заданных L и M.

(1) $M(r)$ обращается в нуль до того, как r станет равным нулю; p и T остаются конечными.

(2) $M(r)$ стремится к нулю, когда r стремится к нулю, причем p и T остаются конечными, когда r положительно или равно нулю.

(3) p и T стремятся к бесконечности, когда $r \to 0$, причем $M(r)$ стремится к пределу $M_0 \geqslant 0$.*

Если только соответствующие системы значений p и T совместимы с возможностью существования газовой фазы, эти три случая соответствуют следующим конфигурациям:

(1) Не существует ни одного равновесного состояния, соответствующего только газовой фазе, при условии радиуса r_0. Можно построить конфи-

* Не исключая и значения $r_0 = \infty$.

гурацию равновесия, поддерживаемую изнутри, если ввести искусственную поддерживающую поверхность при нулевом значении $M(r)$. Если случай (1) имеет место для всех значений r_0, то не существует никакой газовой конфигурации равновесия.

(2) Существует газовая конфигурация равновесия с радиусом r_0.

(3) Не существует никакой газовой конфигурации равновесия, если только M_0 не равно нулю. Если $M_0 \neq 0$, то можно построить равновесную конфигурацию, введя центральную точечную массу M_0. Если M_0 не равно нулю для всех значений r_0, то не существует никакой газовой конфигурации равновесия.

Можно и без математического исследования рассмотреть возможность равновесных конфигураций в случаях (1) и (3), если построить сперва конфигурацию с искусственной связью, а затем удалить эту связь. В случае (1) мы увидим, что произойдет сжатие, а вслучае (3) произойдет расширение, если $M_0 \neq 0$. Сжатие в случае (1) указывает на возможность существования конфигураций с негазовой сердцевиной. Расширение в случае (3) показывает, что при допущенных математических свойствах вещества равновесные конфигурации могут и не существовать.

Все три возможности подчинены тому условию, что значения p и T (а следовательно и ρ) совместимы с уравнением состояния. Таким образом мы исчерпали все возможности для газа с беспредельной сжимаемостью.

Плотность ρ, вообще говоря, увеличивается с глубиной. Поэтому она может при данных L, M, r_0 достигнуть такого значения, при котором уравнение состояния газовой фазы уже не может применяться. Это может произойти в случаях (1) и (2), а в случае (3) всегда будет происходить в окрестностях точки $r = 0$. Продолжать нужно следующим образом. Сперва нам понадобится знать все другие фазы, в которых может находиться вещество. Мы не знаем, какой в действительности окажется соседняя фаза; это должно быть предметом исследования. Возьмем другую любую фазу и рассмотрим ее уравнение состояния и ее химический потенциал $\mu_1(p, T)$**. Пусть $\mu_0(p, T)$ будет химическим потенциалом газовой фазы. Условием

* Существуют исключительные случаи, когда $M(r) \to M_0 \neq 0$ и p и T не стремятся к бесконечности, но я здесь не буду на этом останавливаться.

** Для однородной жидкости химический потенциал тождественен с ее свободной энергией.

термодинамического равновесия на поверхности контакта между обеими фазами согласно Уилларду-Гиббсу является равенство:

$$\mu_1(p, T) = \mu_0(p, T).$$

Плотность, вообще говоря, на поверхности раздела будет меняться скачком, но давление и температура будут меняться непрерывно. Внутри газовой фазы мы имеем $p = f(r)$, $T = \varphi(r)$ из решения дифференциальных уравнений, причем вид функций f и φ зависит от r_0, M и L. Те же самые значения p и T будут иметь место в новой фазе у поверхности раздела $r = r'$. Подставляя эти значения в вышеприведенное условие термодинамического равновесия мы получаем уравнение, определяющее положение поверхности раздела $r = r'$. В каждом данном случае необходимо исследовать, имеет ли это уравнение решения и в частности является ли решение единственным или же есть несколько решений. Такое же вычисление нужно повторить для каждой другой возможной фазы вещества. В каждом случае, в котором мы получим решение, мы будем иметь физическую возможность поверхности раздела, но одни из этих возможностей могут соответствовать устойчивым конфигурациям, а другие — неустойчивым. Далее может случиться, что уравнение определяющее r' имеет два или более корней; для некоторых значений параметров r_0, M, L два таких корня могут совпадать. В этом случае конфигурация будет допускать бесконечно малые виртуальные перемещения, при которых она остается равновесной конфигурацией.

Определив корень r', фиксирующий поверхность раздела, мы можем затем определить p' и T' из уравнений $p' = f(r')$, и $T' = \varphi(r')$, представляющих решение для газовой фазы. Мы можем далее вычислить $\rho(r')$ для новой соседней фазы из нового уравнения состояния $\rho = \psi_1(p, T)$, воспользовавшись значениями, найденными для $p(r')$ и $T(r')$.

Зная p', T', ρ', r' и зная также $M(r')$ и $L(r')$, мы обладаем всем, что нужно для того, чтобы вновь интегрировать внутрь. Мы продолжаем это интегрирование, пока не обратится в нуль $M(r)$ или же пока не обратится в нуль r. Мы повторяем эту процедуру столько раз, сколько окажется необходимым.

Вообще говоря, окажется, что для данных L и M мы не сможем при произвольном r_0 построить конфигурацию, при которой $M(r)$ как раз исчезнет при $r = 0$ и при которой все употреблявшиеся уравнения состояния справедливы для рассматриваемых промежутков значений p и T. Но для

некоторого специального значения или для некоторых специальных значений r_0, например $r_0 = r_0^{(1)}$, $r_0 = r_0^{(2)} \ldots$, это построение может оказаться возможным. В этом случае мы вполне решим задачу и определим радиусы r_0 возможных равновесных конфигураций с заданными L и M, заданным распределением непрозрачности.* При этом могут и даже должны возникнуть исключительные случаи с бесконечным r_0. Такая конфигурация будет занимать все пространство. Но и такая конфигурация будет обладать эффективной поверхностью или фотосферой, где $T = T_e$, например, при конечном значении $r = r_e$. Так вероятно обстоит дело с наблюдаемыми конфигурациями вещества звезд.

Следующей частью исследования является классификация конфигураций для разных значений L и M. Предварительной стадией этой классификации является отождествление внешней газовой области с той или другой из трех взаимно исключающих друг друга и исчерпывающих возможностей (1), (2), (3). Если внешний газовый слой представлен решением, которое при аналитическом продолжении окажется решением типа (1), то я назову соответствующую равновесную конфигурацию «карликовой» (collapsed). Если внешний газовый слой представлен решением, которое при аналитическом продолжении окажется типа (2), то я назову соответствующую равновесную конфигурацию «диффузной». Если внешний газовый слой представлен решением, которое при аналитическом продолжении окажется типа (3), то я назову соответствующую равновесную конфигурацию «сгущенной в центре». Происхождение этих терминов было достаточно объяснено в моей статье «Анализ строения звезд» (Monthly Notices, Nov. 1930).

Для очень широкого класса распределения источников непрозрачности можно показать, что критерий, определяющий к какому типу принадлежит равновесная конфигурация, есть значение L при заданном M, заданном

* Заметим, что распределение источников всегда может быть охарактеризовано уравнением вида

$$\frac{L(r)}{L} = F\left(\frac{M(r)}{M}\right),$$

а распределение непрозрачности — уравнением

$$\frac{\varkappa(r)}{\varkappa_0} = \Phi\left(\frac{M(r)}{M}\right),$$

где функции $F(x)$, $\Phi(x)$ стремятся к единице при $x \to 1$; $\varkappa_0$ обозначает непрозрачность на поверхности.

распределении источников и заданной непрозрачности. Существуют такие значения L_0 и L_1 ($L_0 < L_1$), что при $L < L_0$ внешние слои представлены распределением типа (1), при $L = L_0$ типа (2), при $L_0 < L < L_1$ типа (3). При $L > L_1$ не существует равновесных конфигураций.

Из этого непосредственно вытекает, что конфигурации типа (2) вообще неустойчивы. Дело в том что небольшое изменение отдачи энергии L заставляет равновесную конфигурацию перейти от типа (2) к типу (1) или типу (3). Конфигурации типа (2) непрерывно примыкают к конфигурациям типа (1) или (3) лишь при специальных значениях r_0, называемых точками бифуркации. При этих значениях r_0 они устойчивы. Неустойчивые же конфигурации типа (2) существуют, вообще говоря, при любом r_0.

Возникает вопрос, в какой степени в природе возможно наблюдать существование конфигураций этих различных логически возможных типов.

В статье «Анализ строения звезд» и других еще неопубликованных исследованиях я показал, что конфигурации типа (1) в случае астрономических масс должны обладать очень большой средней плотностью и могут быть отождествлены с белыми карликами. Эти объекты вероятно очень часто встречаются в природе. Немногие известные нам белые карлики все расположены близко от солнца. Герасимович недавно показал, что все ядра планетарных туманностей должны быть очень плотными. Таким образом, известны объекты, которые могут быть отождествлены с карликовыми конфигурациями типа (1). Но этим не исчерпываются все наблюдаемые в природе объекты. Другие звезды должны принадлежать или к типу (2), или к типу (3), а так как тип (2) неустойчив, то они должны быть типа (3).

Подтверждением этого взгляда служат новые звезды. Согласно очерченной выше теории, переход через абсолютную яркость $L = L_0$ является, вообще говоря, прерывным явлением. Объект, у которого L втечение веков уменьшается, должен претерпеть скачкообразное изменение, когда L переходит через значение $L = L_0$, приближаясь к L_0 от сгущенных в центре конфигураций и переходя через это значение к карликовым конфигурациям. Происходящая при этом сжатии потеря потенциальной энергии приведет ко временному повышению видимой яркости; существенным предсказанием теории является то обстоятельство, что яркость в равновесном состоянии после взрыва будет не на много ниже, чем яркость в равновесном состоянии до взрыва, а именно будет приближенно равняться L_0. Это именно и наблюдается в случаях новых звезд (см. Stratton, Handbuch d. Astrophysik).

Если r_0 есть радиус звезды до взрыва, r_1 — ее радиус после взрыва, T_0 и T_1 эффективные температуры до и после взрыва, то

$$L_0 = \pi a c r_0^2 T_0^4 = \pi a c r_1^2 T_1^4.$$

Отношение плотностей $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ определяется из формулы

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{M_1}{M_0}\frac{r_0^3}{r_1^3}.$$

Масса, уходящая прочь при взрыве новой звезды, вероятно очень мала по сравнению с массой самой звезды; поэтому можно положить $M_1 = M_0$. Отсюда следует

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{r_0^3}{r_1^3} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^6.$$

Через некоторое время после взрыва спектр оказывается типа Вольфа-Райе, что соответствует эффективной температуре T_1 порядка 40000°. Перед взрывом спектр известен лишь в очень немногих случаях, но то, что известно, позволяет предположить, что температура T_0 до взрыва обычно бывает порядка 8000°. Поэтому $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ будет порядка

$$\left(\frac{40\,000}{8\,000}\right)^6 = 1.5 \cdot 10^4.$$

Отсюда следует, что звезда после взрыва должна быть очень плотной, если только звезда до взрыва имеет нормальную плотность. Ясно, что возгорание новой звезды действительно сопровождается сжатием. Поэтому звезда после взрыва является карликовой звездой типа (1). По методу исключения заключаем, что звезда до взрыва может быть или типа (2) или типа (3). Если до взрыва звезда была типа (2) и если тип (2) устойчив, то нет никакой причины, почему должно произойти сжатие. Отсюда следует, что или до взрыва звезда была типа (3), или же, что тип (2) неустойчив. Но если звезда до взрыва была типа (3) и если тип (2) устойчив, то при приближении L к L_0 звезда должна была бы переходить в тип (2), между тем как наблюдения показывают, что она переходит в тип (1). Поэтому во всяком случае мы заключаем, что тип (2) неустойчив.

Строение звезд типа (3) мало понятно. Мы знаем только, что они являются сгущенными в центре, иными словами, что объекты, обладающие астрономическими массами и нормальной плотностью, должны обладать сгущением в центре. Но природа центрального сгущения во многом для нас непонятна.

Газовая область в звезде сгущенной в центре должна состоять отчасти из идеального газа в классическом смысле, а отчасти из вырожденного газа. Это не есть изменение фазы; дело сводится только к тому, что в уравнении состояния начинают преобладать другие члены. Но Каулинг и Стромгрен* показали, что в вырожденной области решение является решением типа (3), причем ρ и T становятся бесконечными при приближении r к 0. Поэтому обычное уравнение состояния вырожденного газа перестает быть верным при $r \to 0$. При этом или другие члены уравнения, которыми мы пренебрегли, становятся заметными, или же должно наступить изменение фазы. Можно показать, что требуемое решение уравнения Эмдена, которое описывает вырожденную область, становится (при известных условиях) определенным, как только определены термодинамические свойства следующей фазы; внешний радиус r_0 при этом также становится вполне определенным.

В статье «Анализ строения звезд» я разобрал ряд примеров общей теории. Можно разобрать любое количество аналогичных примеров, так например, рассмотреть случай ядра, обладающего иной непрозрачностью, чем оболочка, или случай оболочки, лишенной источников энергии и окружающей ядро с равномерной мощностью этих источников и т. д. и т. д. Все эти примеры имеют ценность только в том отношении, что они дают общую картину свойств равновесных конфигураций. Я хотел подчеркнуть здесь, во-первых, формальную сторону задачи, во-вторых, общий метод ее решения. Трудности, которые возникли перед моими критиками при обсуждении моей работы, почти все произошли из того, что они оказались не в состоянии понять основной вопрос, а именно, каково состояние произвольной массы M, испускающей энергию с произвольной быстротой L? В моей работе не предлагается теория строения звезд в духе теорий Лейна, Эддингтона или Джинса. В ней формулируется лишь задача и делаются попытки решить ее в некоторых случаях. Тот, кто не согласен с моим решением, не имеет права

* См. статьи B. Stromgren, T. G. Cowling и E. A. Milne, находящиеся в печати (Monthly Notices, March, 1931).

оставить дело в таком состоянии; он должен предложить какое-нибудь решение, должен ответить на поставленный мною вопрос.

Идеальный опыт, поставленный в космических размерах, опыт имеющий такой же смысл, как например, перенесение часов или масштаба с Земли на Сириус, мог бы дать ответ на этот вопрос; как я показал, для этого нужна только материальная система, батарея и достаточное количество реостатов. Задача математика состоит в том, чтобы получить такой же ответ посредством термодинамического рассуждения. Задача же астронома состоит в том, чтобы получить ответ, наблюдая те опыты, которые на наших глазах совершаются в небесах. В этой статье я дал общий метод, посредством которого математик может решить свою задачу; рассматривая наблюдаемые плотности звезд и явления возгорания новых звезд, я дал пример того, как астроном может решить свою.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 2 руб. 50 коп.